Équation de la chaleur, approches élémentaires

Thierry Audibert
thierry.audibert@maths2b.fr

21 décembre 2013

Disponible sur http://www.univenligne.fr sous le nom Chaleur.pdf

Table des matières

1 Introduction

Nous étudions ici les équations de diffusion avec les outils élémentaires *du niveau* [1] d'un cours de L2/MP, à savoir les séries de Fourier, la transformation de Fourier, la convolution des fonctions, la méthode des différences finies. Ce qui ne fait pas explicitement partie du cursus à ce niveau est défini et les propriétés que nous utilisons sont démontrées sous forme d'exercices (tous corrigés, afin de rendre ce document auto-suffisant).
Bien des éléments de ce polycopié ont leur origine dans des TD, des fiches de compléments pour les TIPE... Il devrait garder sa fonction initiale qui est de prouver que les mathématiques élémentaires sont déjà efficientes. Mais il pourrait aussi être utile pour l'agrégation, les propriétés de la transformation de Fourier, de la convolution, pouvant alors être énoncées dans le cadre de la théorie de l'intégration de Lebesgue sans changement notoire (je renvoie pour cela à l'ouvrage de Gasquet et Witomski [7] ou au cours d'Analyse de L. Schwartz [16]).
Il me semble par ailleurs que la confrontation, avec les moyens du bord, aux problèmes qui sont évoqués ici devrait être un *préalable* à toute rencontre avec la théorie des distributions contrairement à ce qui se faisait encore il y a peu dans les formations universitaires (et plus paradoxalement encore dans quelques écoles d'ingénieurs).

Quelques indications pour la lecture

1. La section 2 (lois de conservation et modélisation des phénomènes de diffusion) est essentielle et doit être lue avant toute chose. Idéalement elle devrait faire partie du cours de maths dans toutes les formations (au même titre que la cinématique ou que les rudiments de la mécanique).
2. Cela vu, on peut commencer la lecture en plusieurs points, chaque section étant à peu près indépendante des autres sur le plan de la démarche logique.
3. On aura l'occasion, surtout en (4.5), de pratiquer un raisonnement par **analyse-synthèse**, clarifions en la démarche logique :
   - nous cherchons à résoudre un problème dont $\mathcal{S}$ est l'ensemble des solutions. Les éléments de $\mathcal{S}$ sont des objets mathématiques ayant certaines propriétés (ici, ce seront typiquement les solutions d'une EDP avec des conditions initiales, des conditions aux bords...) ;
   - nous commencerons par élaguer le problème en recherchant les propriétés que vérifierait nécessairement une éventuelle solution. C'est la **phase d'analyse** de la recherche.
   - Les conditions nécessaires obtenues dans la phase d'analyse déterminent un ensemble $\mathcal{S}'$ qui contient $\mathcal{S}$. Elles doivent évidemment être suffisamment riches et $\mathcal{S}'$ suffisamment restreint pour que $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$.
   - La phase d'analyse est achevée lorsqu'on est à même de prouver que les conditions nécessaires obtenues sont aussi suffisantes et que $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$. C'est la **phase de synthèse** (de vérification).
4. Signalons que, dans la version électronique, pour retourner à la table des matières il suffit de cliquer sur l'hyperlien : ↺ 1

1. ce qui n'est pas nécessairement le programme

2 Lois de conservation et phénomènes de diffusion

Nos proposons avant tout quelques exemples de problèmes de diffusion. Sans pratique de cette phase de modélisation, on risque fort de rester perplexe devant certains des résultats mathématiques qui suivront.

2.1 Lois de conservation, équation de Burgers

Quelques exemples de lois de conservation :

1. **Démographie de base**
   Dans tous les exemples qui suivent, la même idée est à l'œuvre, formulée ici dans un cadre discret : dans un territoire donné l'évolution d'une population, entre deux dates est

   (immigration - émigration) + (naissances - décès).

   Ce que l'on exprimera encore, $\partial\Gamma$ représentant l'ensemble des postes frontières et Γ l'ensemble des bureaux d'état-civil du territoire, par la formule

$$\sum_{x\in\partial\Gamma}(\text{entrées}(x,t_1,t_2)-\text{sorties}(x,t_1,t_2))+\sum_{x\in\Gamma}(\text{naissances}(x,t_1,t_2)-\text{décès}(x,t_1,t_2))$$

2. **Concentration d'une espèce chimique (1D)**
   On considère ici un tube mince, de section constante s, contenant une espèce chimique dont la concentration est fonction de x, variable d'espace, et du temps t. Nous nous intéressons à l'évolution de la concentration $C = c(x,t)$.
   Nous noterons :
   - $c(x,t)$ la concentration en x à l'instant t en $[M/L^3]$;
   - $J(x,t)$ quantité de matière traversant la section du tube en x par unité de surface et par unité de temps à l'instant t en $[M/(L^2T)]$ (débit par unité de surface ou densité de courant, dans le sens des x croissants, que l'on pourra interpréter comme) ;
   - $f(x,t,c)$ l'apport de matière par unité de temps et de volume en (x,t) en $[M/(L^3\times T)]$.

   La différence entre les quantités de matière (pour l'espèce concernée) contenues aux instants t_1 et t_2, dans la portion $[x_1,x_2]$ du tube, est

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} s\,c(x,t_2)\,dx &- \int_{x_1}^{x_2} s\,c(x,t_1)\,dx\\ &= \int_{t_1}^{t_2} s(J(x_1,t)-J(x_2,t))\,dt \quad + \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{x_1}^{x_2} sf(x,t,c(x,t))\,dx\right)dt \qquad (2.1)\end{aligned}$$

   Ce qui donne, $t = t_2$ étant arbitraire :

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial c(x,t)}{\partial t}\,dx = (J(x_1,t)-J(x_2,t)) + \int_{x_1}^{x_2} f(x,t,c(x,t))\,dx,$$

   ou encore :

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial c(x,t)}{\partial t}\,dx = -\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial J(x,t)}{\partial x}\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x,t,c(x,t))\,dx,$$

   d'où enfin, puisque $x = x_2$ est tout autant arbitraire :

$$\boxed{\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial J(x,t)}{\partial x} = f(x,t,c(x,t))} \tag{2.2}$$

3. **Trafic routier**
Nous considérons ici une portion de route sur laquelle circulent des véhicules. Les grandeurs étudiées sont fonctions de x, variable d'espace, et du temps t.
Nous noterons :
– $c(x,t)$ le nombre de véhicules par unité de longueur au voisinage de x à l'instant t, de dimension $[1/L]$;
– $v(x,t)$ la vitesse moyenne (orientée) des véhicules à l'instant t au point x, de dimension $[L/T]$;
– le nombre de véhicules passant en x par unité de temps, de dimension $[1/T]$, est donné par
$$J(x,t) = c(x,t) \times v(x,t);$$
on supposera que la vitesse moyenne est fonction de l'intensité du trafic seule, ce qui s'exprime
$$J(x,t) = c(x,t) \times v(x,t) = \Phi(c(x,t));$$
– on note enfin $f(x,t,c)$ le nombre de véhicules qui entrent ou sortent de la route par unité de temps en x à l'instant t, de dimension $[1/T]$. $f(x,t,c)$ est nul si aucune entrée ou sortie n'est possible au point considéré.
Peu de choses changent par rapport à l'exemple précédent, et le même raisonnement sur la conservation du nombre de véhicules conduit à la même équation qui devient

$$\boxed{\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = \Phi'(c(x,t))\frac{\partial c(x,t)}{\partial x} + f(x,t,c(x,t))} \tag{2.3}$$

↺ 1

2.2 Équations de diffusion, loi de Fick

1. **Retour sur la concentration d'une espèce chimique (1D), loi de Fick**
On considère ici le tube mince du paragraphe (2) et l'équation de conservation
$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial J(x,t)}{\partial x} = f(x,t,c(x,t)). \tag{2.4}$$
Si nous supposons qu'entre deux points x_1 et x_2 la quantité de matière qui diffuse, par unité de temps, des plus fortes vers les plus faibles concentrations est proportionnelle à la différence des concentrations entre ces points (loi de Fick) , la densité de courant J vérifie
$$J(x,t) = -D\frac{\partial c(x,t)}{\partial x},$$

et l'équation (2.4) devient,

$$\boxed{\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(D(x,t)\frac{\partial c(x,t)}{\partial x}\right) = f(x,t,c(x,t)).} \tag{2.5}$$

et lorsque D est constant :

$$\boxed{\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} - D\frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t,c(x,t)).} \tag{2.6}$$

Sur ces questions je conseille la lecture de [4] qui est à la fois d'un niveau mathématique élémentaire et riche en exemples de modélisations.

2. **équation de la chaleur**

2.3 Marches aléatoires et équations de diffusion

Viendra avec le programme 2014-2015 en deuxième année...

3 Équation de la chaleur et séries de Fourier

Pré-requis : un cours élémentaire sur les séries de Fourier (voir le polycopié donnant le cours de MP-programme 2013-2014 sur `univenligne.fr`). Les séries de Fourier disparaissent du programme en 2014, des fois que ça servirait à quelque chose !
↻ 1

3.1 Séparation des variables

On considère ici le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) & = 0 \\ \\ u(x,0) & = h(x) \text{ pour tout } x > 0 \\ u(0,\ t) = u(L,\ t) & = 0 \quad \text{ pour tout } t > 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

dans lequel $u(x,t)$ est définie sur $[0,L] \times [0,\infty[$ et h sur $[0,L]$.
Le théorème 4 donne des conditions suffisantes sur h pour que ce problème admette une solution.

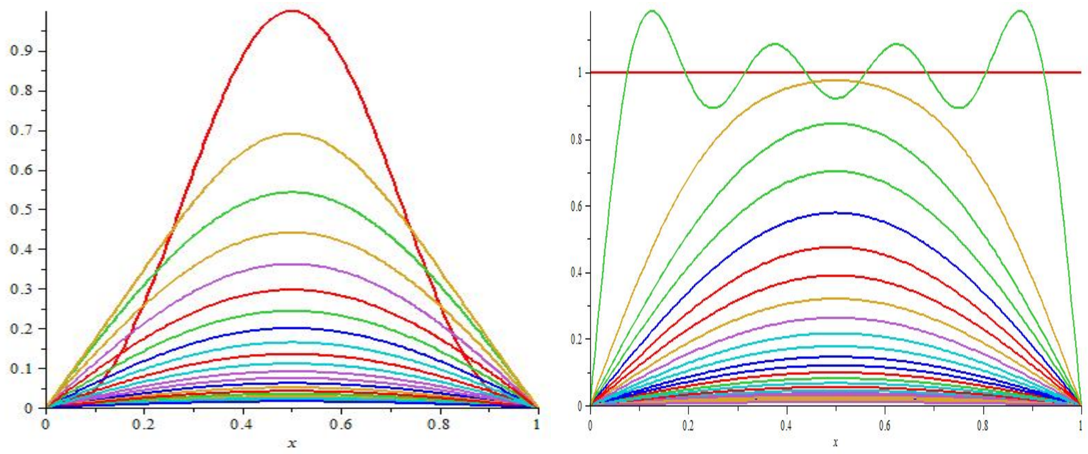
Théorème 1
Avec les notations de (3.1) on suppose que h est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0,L]$ et prolongeable en une fonction de de classe $\mathcal{C}^2$ et de classe $\mathcal{C}^3$ par morceaux, impaire et $2L$ périodique. Alors, le problème (3.1) admet une solution et une seule qui est donnée par

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 D\,t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

les h_k étant les coefficients de Fourier du prolongement de h.

Démonstration
L'exercice 2 déroule une démonstration selon deux idées directrices : faire apparaître des solutions à variables séparables du sous-problème obtenu en omettant la condition initiale et développer en série de Fourier le prolongement impair et $2L$ périodique de la fonction $h(x)$.
L'unicité de la solution est l'objet de l'exercice 3.

Observations
Les conditions sur la fonction h apparaitront peu réalistes pour des applications réelles. On peut ainsi se demander ce qu'il advient de l'expression formelle de la solution $u(x,t)$ lorsque h est simplement continue par morceaux sur $[0,L]$. Nous allons tenter, avec l'exercice (simpliste) 1, de répondre à cette question en représentant les fonctions $u(x,t)$ lorsque h vérifie les propriétés de notre théorème, puis lorsqu'elle est seulement de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Ce sont là des observations importantes qu'éclaire la notion de **solution faible** indispensable pour justifier les **méthodes numériques.**



Représentations de $x \to u(x,t)$ avec $D = 1$ et pour plusieurs valeurs de t.
On a représenté ici les sommes partielles

$$u_7(x,t) = \sum_{k=1}^{7} h_k e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 D\,t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

• A gauche, la fonction h vérifie les hypothèses du théorème.
• A droite, h est égale à 1 sur $[0,1]$ ce qui met à mal la continuité aux bords lorsque $t = 0$. La première fonction qui oscille autour de la valeur 1, est $u_7(x,0)$, c'est la $7^{ième}$ somme de Fourier de h.

Exercice 1 Le but est de tracer certaines des fonctions données par le théorème 4 en sortant, comme il se doit dans la vraie vie, des hypothèse du théorème pour voir ce qui en reste. On travaillera sous Maple ou Scilab,

1. On suppose f définie sur $[0,L]$. Tracer son prolongement impair et de période $2L$.
2. Écrire une fonction $b(h,n,L)$ qui prend en argument une fonction f définie sur $[0,L]$, un entier $n \geq 1$, un réel L et retourne le coefficient de Fourier b_n de son prolongement impair de période $2L$.
   Écrire de la même façon une fonction $Fourier(h,n,L,x)$ retournant sa $n^{ième}$ somme de Fourier (au point x).
   Tester avec les exemples de la question 4. Interprétez à la lumière des théorèmes fondamentaux sur la convergence des séries de Fourier.
3. Construire enfin une fonction $U(f,nL,x,t)$ qui retourne l'expression de la fonction
$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 D\,t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$
4. Réaliser des tracés lorsque $L = 1$, $h(x) = 64\,x^3\,(1-x)^3$ (les hypothèses du théorème sont alors vérifiées) et $h(x) = 1$ sur $[0,1]$ (elles ne le sont plus).
   Discuter.

corrigé en 3.3.1

3.2 Les démonstrations sous forme d'exercices

Exercice 2 *équation de la chaleur, problème (3.1) : existence*
On note ici $D = \frac{1}{C}$...

1. Rechercher les solutions de la forme $F(x) \times G(t)$ vérifiant les conditions conditions aux limites (1). Ceci conduit à un problème

$$F"(x) - \lambda F(x) = 0 \text{ avec } F(0) = F(L) = 0$$

(il s'agit d'un problème de Sturm-Liouville), qui n'admet des solutions non nulles que pour certaines valeurs de λ que l'on précisera.

2. On suppose que $h(x)$ est un polynôme trigonométrique de période $2L$:

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n} h_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right).$$

Le système (E), (1), (2) admet-il une solution ?

3. On suppose que h est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0, L]$ et prolongeable en une fonction de de classe $\mathcal{C}^2$ et de classe $\mathcal{C}^3$ par morceaux, impaire et $2L$ périodique que l'on notera $\tilde{h}$. On notera sa série de Fourier

$$\sum h_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

et on posera

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \frac{t}{C}} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

lorsque cela aura un sens.

   (a) Que dire des séries de coefficients $\sum_k |h_k|$, $\sum_k k|h_k|$ et $\sum_k k^2|h_k|$?

   (b) Montrer que la somme des fonctions de la variable x :

$$x \to u_m(x,t) = h_k e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \frac{t}{C}} sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

   est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et préciser $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$.

   (c) Montrer que la somme des fonctions de la variable t,

$$t \to u_m(x,t) = h_k e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \frac{t}{C}} sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

   est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et préciser $\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)$.

   (d) Montrer qu'il existe une solution $u(x,t)$ du problème que l'on exprimera en fonction des coefficients de Fourier de $\tilde{h}$.

corrigé en 3.3.2

Exercice 3 *problème (3.1), unicité*
Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème (3.1). On note $u_0 = u_2 - u_1$ et on veut montrer que $u_0 = 0$.

1. Intégrer $u_0(x,t) \times \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u_0(x,t) - \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial}{\partial t} u_0(x,t) \right)$ entre $x_1 = 0$ et $x_2 = L$.
2. En déduire que $t \to \displaystyle\int u_0^2(x,s)\, ds \searrow$ et conclure.

corrigé en 3.3.3

↺ 1

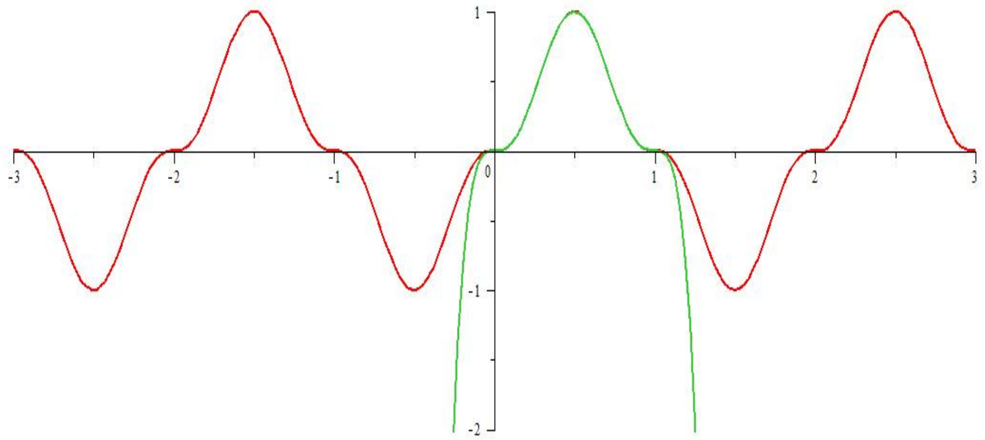
3.3 Les corrigés

Corrigé n° 3.3.1 corrigé 1
Avec MAPLE

Question 1 : Juste pour le fun, un prolongement impair et de période $2L$ à l'aide de la fonction partie entière (**floor**).

```
f:= x -> 64*x^3*(1-x)^3;
H:= (f,x)-> (-1)^floor(x)*f(x-floor(x));
plot({f(x),H(f,x)},x=-3..3,-2..1, thickness=2);
```

$$x \mapsto 64\,(-1)^{floor(x)}\,(x - floor\,(x))^3\,(1 - x + floor\,(x))^3$$

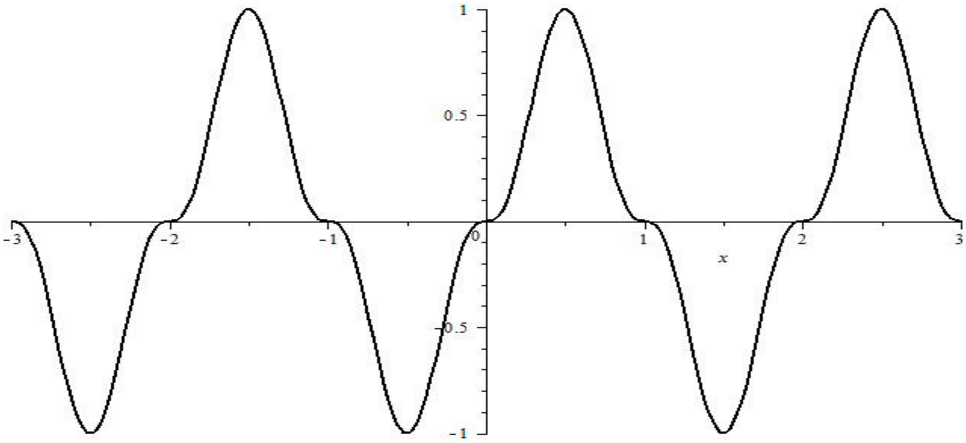


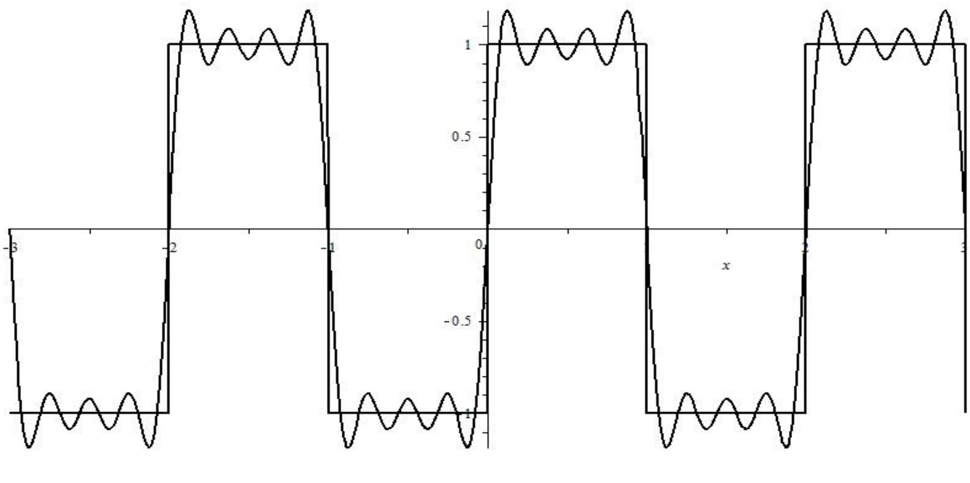
Question 2 : On exprime les coefficients $b_n(f)$ pour une fonction impaire. Les sommes de Fourier s'expriment simplement.
Lorsque f est le prolongement impair et de période $2L$ de $h : x \to 64 * x^3 * (1-x)^3$ il y a convergence normale de la série de Fourier (f est de classe $\mathcal{C}^1$ au moins...) ; lorsque f est le prolongement impair et de période $2L$ de 1, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, non continue, il y a convergence alors simple des sommes de Fourier vers la régularisée de f mais pas convergence uniforme.

```
b       := (f,n,L)-> 2*Int(f(u)*sin(n*u*Pi/L),u=0..L)/L;
Fourier:= (f,n,L,x) ->  sum(b(f,k,L)*sin(Pi*k*x/L),k= 1..n) ;

F7      := evalf(Fourier(f, 7, 1,x)):
plot(%, x=-3..3,thickness=2,color=black);

U7:=evalf(Fourier(1, 7, 1,x)):
plot({U7,H(1,x)}, x=-3..3, thickness=2,color=black);
```

$$(f,n,L,x) \mapsto \sum_{k=1}^{n} \left(2 \int_0^L 64\, u^3 \,(1-u)^3 \sin\left(\frac{ku\pi}{L}\right) du \sin\left(\frac{\pi\, kx}{L}\right) L^{-1} \right)$$

$$(f,n,L) \mapsto 2 \int_0^L 64\, u^3 \,(1-u)^3 \sin\left(\frac{nu\pi}{L}\right) du L^{-1}$$

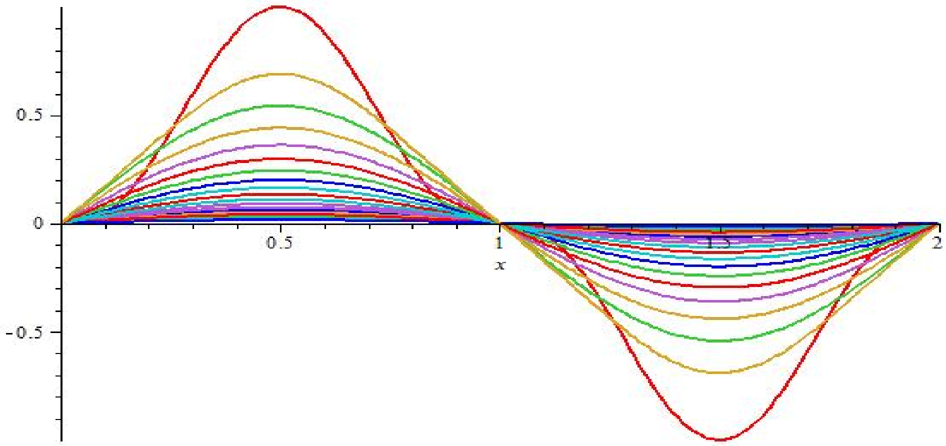


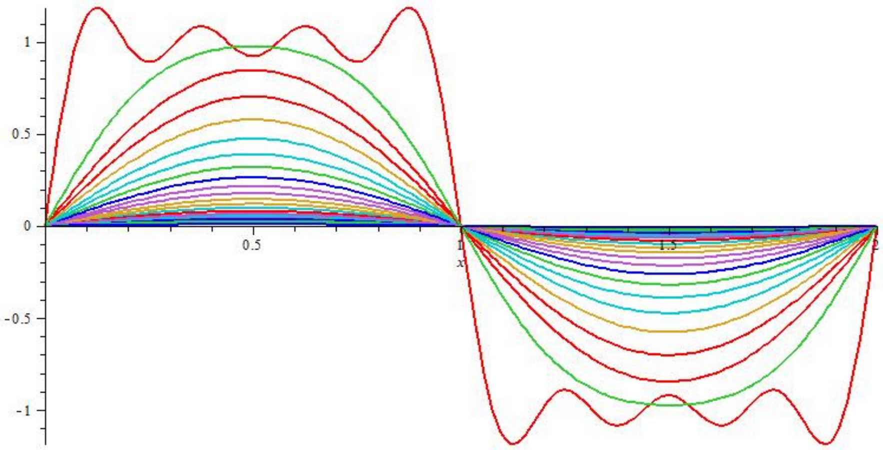


Question 3 : Pas de mystère pour exprimer les sommes partielles de la série de somme $u(x,t)$. Pour ce qui est de la syntaxe, on utilise les formes inertes **Sum** et **Int** pour choisir la façon d'effectuer les calculs (on choisit ici **value** car dans les deux cas le logiciel calcule formellement les coefficients $b_n(f)$).

```
U:=(h,N,L,D,x,t)->
Sum(b(h,m,L)*sin(m*Pi*x/L)*exp(-D*(m*Pi/L)^2*t),m=1..N);

S   := unapply(value(U(f,N,1,1,x,t)),(N,x,t));
seq(S(10,x,k/50), k=0..20):
plot({%}, x=0..2,thickness=2);

T:= unapply(value(U(1,7,1,1,x,t)),(N,x,t)):
seq(T(36,x,k/50), k=0..25):
plot({%}, x=0..2, thickness=2);
```

$$(h,N,L,D,x,t) \mapsto \sum_{m=1}^{N} \left(2 \int_0^L h(u) \sin\left(\frac{m\,u\pi}{L}\right) du \sin\left(\frac{m\,\pi\,x}{L}\right) \mathrm{e}^{-\frac{(D)m^2\pi^2 t}{L^2}} L^{-1} \right)$$





Corrigé n° 3.3.2 corrigé 2

1. On considère une fonction de la forme $u(x,t) = F(x) \times G(t)$ vérifiant l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = C \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)$$

sur $[0, L] \times [0, \infty[$ ainsi que la condition aux bords (1) $u(0,\ t) = u(L,\ t) = 0$.

• Le système devient :

$$\begin{cases} F\text{"}(x)G(t) = CF(x)G'(t) & \text{pour } x \in [0, L] \text{ et } t \geq 0 \\ F(0)G(t) = F(L)G(t) = 0 & \text{pour tout } t \geq 0 \end{cases}$$

• On suppose pour la suite que u n'est pas la fonction nulle (**F et G ne sont donc pas identiquement nulles**).

• **Etude de** F. Fixons t_1 en lequel $G(t_1) \neq 0$, il vient :

$$\begin{cases} F\text{"}(x) = C \dfrac{G'(t_1)}{G(t_1)} F(x) \quad = \lambda F(x) \text{ pour } x \in [0, L] \text{ et } t \geq 0 \\ F(0) = F(L) = 0 \end{cases}$$

Ceci conduit au problème

$$F\text{"}(x) - \lambda F(x) = 0 \text{ avec } F(0) = F(L) = 0$$

(il s'agit d'un problème de Sturm-Liouville (HP) et pas d'un problème de Cauchy (in P)). Distinguons selon le paramètre λ.

(a) Lorsque $\lambda = 0$, $F(x) = ax + b$ ne vérifie les conditions $F(0) = F(L) = 0$ que si elle est nulle ;

(b) Lorsque $\lambda > 0, ;$ $F(x) = a\, e^{\sqrt{\lambda}x} + b\, e^{-\sqrt{\lambda}x}$ ne s'annule en 0 et L que si elle est nulle (écrire le système en a et b).

(c) Lorsque $\lambda = -\omega^2 < 0$, $F(x) = \alpha\ \cos(\omega x) + \beta\ \sin(\omega x)$ est nulle en 0 et L ssi $\alpha = 0$ et $\beta\ \sin(\omega L) = 0$. Pour qu'il existe des solutions non nulles, il faut et il suffit que $\omega L \equiv 0[\pi]$, soit

$$\omega = \frac{k\pi}{L} \text{ et } \lambda = \frac{-k^2\pi^2}{L^2}$$

• **Retour à G lorsque** $\boxed{\lambda = \dfrac{-k^2\pi^2}{L^2},\ k \in \mathbb{N}}$

On reprend l'équation $F\text{"}(x)G(t) = CF(x)G'(t)$ en un point x_1 tel que $F(x_1) \neq 0$. Il vient

$$G'(t) = \frac{F\text{"}(x_1)}{CF(x_1)} G(t) = \frac{-k^2\pi^2}{C\,L^2} G(t) \text{ et } G(t) = \gamma e^{\frac{-k^2\pi^2}{C\,L^2} t}.$$

• **Conclusion :** les solutions non nulles à variables séparables sont de la forme

$$u(x,t) = e^{\frac{-k^2\pi^2}{C\,L^2} t} \sin\left(\frac{k\pi\, x}{L}\right)$$

2. Soit $h(x) = \sum_{k=1}^{n} h_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$. En posant

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x,t) = \sum_{k=0}^{n} h_k e^{\dfrac{-k^2\pi^2}{C\,L^2}t} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right),$$

on a clairement une solution de l'équation qui vérifie les conditions $u(x,0) = h(x)$ et $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

3. **Passons aux séries :** On suppose que h est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0,L]$ et prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et de classe $\mathcal{C}^3$ par morceaux, impaire et $2L$ périodique que l'on notera $\tilde{h}$.

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \frac{t}{C}} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

lorsque cela a un sens.

(a) Comme $\tilde{h}$ est au moins continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, sa série de Fourier converge normalement et sa somme est h. On a donc

$$\tilde{h}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

et $\sum_k |h_k|$ converge ($|h_k| = ||x \to h_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)||_\infty$).

De la même façon, la série de Fourier de $\tilde{h}'$ converge normalement et les termes généraux de cette série s'obtiennent en dérivant ceux de $\tilde{h}$:

$$\tilde{h}"(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \frac{k\pi}{L} \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

On en déduit la convergence de $\sum_k k|h_k|$ pour les mêmes raisons que précédemment. Enfin, la série de Fourier de $\tilde{h}'$ qui est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux converge normalement et $\sum_k k^2|h_k|$ est convergente.

(b) On note $f_k := x \to u_k(x,t) = h_k e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \frac{t}{C}} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$. On a :

$$f_k'(x) = h_k \frac{k\pi}{L} e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \frac{t}{C}} \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

$$f"_k(x) = -h_k \frac{k^2\pi^2}{L^2} e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \frac{t}{C}} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

i. Chaque fonction f_k est de classe $\mathcal{C}^2$;

ii. la série $\sum f_k(x)$ converge en un point (0 par exemple) ; il y a même convergence normale sur $\mathbb{R}$;

iii. la série $\sum f_k'(x)$ converge en un point ; il y a même convergence normale sur $\mathbb{R}$;

iv. la série $\sum f"_k(x)$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$. Il y a même convergence normale sur $\mathbb{R}$;

D'après le théorème de dérivation d'une série de fonction $\sum f_k$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et on obtient ses dérivées en dérivant terme à terme ce qui donne :

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \frac{t}{C}} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \frac{k\pi}{L} e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \frac{t}{C}} \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = -\sum_{k=0}^{\infty} h_k \frac{k^2\pi^2}{L^2} e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \frac{t}{C}} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

(c) On démontre de la même façon que la somme des fonctions de la variable t,

$$t \to u_m(x,t) = h_k e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \frac{t}{C}} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et que la dérivée de sa somme est

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \frac{-1}{C}\sum_{k=0}^{\infty} h_k \frac{k^2\pi^2}{L^2} e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \frac{t}{C}} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

(d) $u(x,t)$ satisfait à l'équation car $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = C\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)$ comme on peut le vérifier en regardant les deux séries, $u(x,t)$ est nulle si $x = 0$ ou L; enfin, $u(x,0) = h(x)$.
L'idée de base était que l'on peut prolonger une fonction quelconque par imparité et 2L périodicité pour l'écrire comme somme d'une série trigonométrique.

Corrigé n° 3.3.3 corrigé 3

Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème (3.1) et $u_0 = u_2 - u_1$.

1. Développons, intégrons par parties, dérivons sous le signe somme :

$$\int_0^L u_0(x,t) \times \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_0(x,t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}u_0(x,t)\right)\, dx$$
$$= \int_0^L u_0(x,t) \times \frac{\partial^2}{\partial x^2}u_0(x,t)\, dx - \frac{1}{c}\int_0^L u_0(x,t)\frac{\partial}{\partial t}u_0(x,t)\, dx$$
$$= \left[u_0(x,t)\frac{\partial}{\partial x}u_0(x,t)\right]_0^L - \int_0^L \left(\frac{\partial}{\partial x}u_0(x,t)\right)^2 dx - \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^L u_0^2(x,t)\, dx$$

La partie toute intégrée est donc nulle de par la condition aux bords vérifiée par u_0.

2. La fonction $t \to \int_0^L u_0^2(x,s)\, ds$ a donc une dérivée négative sur $\mathbb{R}^+$ et $\searrow$. Comme elle est nulle en $t = 0$ et par ailleurs positive, elle est partout nulle.

↺ 1

4 Équation de la chaleur et transformée de Fourier

Pré-requis : un cours élémentaire sur les fonctions intégrables et les intégrales dépendant d'un paramètre (voir polycopiés) $\circlearrowleft$ 1

4.1 Transformée de Fourier : point de vue élémentaire

Définition 1 On définit la transformée de Fourier d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ en posant

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x} f(x)\, dx \tag{4.1}$$

La définition varie dans la littérature d'un facteur multiplicatif autour de la pulsation et on peut aussi poser

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\omega x} f(x)\ dx.$$

Exercice 4 *existence, premières propriétés*
Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que sa transformée de Fourier est définie pour tout réel ω.
2. Montrer que $\hat{f}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$, donner une majoration de $||\hat{f}||_{\mathbb{R}}^{\infty}$.
3. Calculer la transformée de Fourier de la fonction caractéristique de l'intervalle $[a, b]$:

$$\begin{cases} \chi(t) = 1 & \text{si } a \leq t \leq b \\ \chi(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Est-elle intégrable ?

corrigé en 4.4.1

Exercice 5 *lemme de Riemann Lebesgue*
Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On veut montrer que

$$\lim_{\omega \to +\infty} \hat{f}(\omega) = 0;$$

1. On suppose que f est une fonction en escalier sur $[a, b]$. Montrer que

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_a^b e^{i\alpha t} f(t)\ dt$$

   a pour limite 0 (α désigne un réel).
2. Montrer que le même résultat est vrai pour toute fonction f, continue par morceaux sur l'intervalle $[a,\ b]$.
3. On considère maintenant f intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que
   (a) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle compact $[a, b]$ tel que

$$\int_{]-\infty,a]} |f| \leq \varepsilon,\ \int_{[b,+\infty[} |f| \leq \varepsilon,$$

(b) En déduire que

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t}\, f(t)\; dt = 0.$$

corrigé en 4.4.2

Exercice 6 *dérivation*

1. Donner une CS pour que la transformée de Fourier de f soit dérivable. Donner alors une expression de sa dérivée.
2. Donner une CS pour que la transformée de Fourier de f' soit définie. La calculer dans ce cas.

corrigé en 4.4.3

Exercice 7 *transformée de Fourier d'une Gaussienne*
Soit f définie par $f(t) = e^{-at^2}$, avec $a > 0$.

1. Montrer que sa transformée de Fourier est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$.
2. Montrer que $\hat{f}$ vérifie une équation différentielle linéaire et la calculer.

corrigé en 4.4.4

4.2 Produit de convolution (fonctions intégrables)

↺ 1

Définition 2 *produit de convolution*
Soient f et g deux fonctions continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Lorsque la fonction $t \to f(x-t)g(t)$ est intégrable, on pose

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\, dt \tag{4.2}$$

On appelle **produit de convolution** de f et g cette fonction $f * g$

Exercice 8 *existence et propriétés du produit de convolution*
Soient f et g continues par morceaux sur $\mathbb{R}$. On suppose f intégrable et g bornée.

1. Montrer que $f * g$ et $g * f$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et que $f * g = g * f$
2. Montrer que si f ou g est continue, le produit de convolution $f * g$ est aussi continu.
3. En **admettant au besoin** la validité d'une formule du type

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,t)dt\right) dx = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,t)dx\right) dt$$

exprimer une relation entre $\widehat{f * g}$, $\hat{f}$ et $\hat{g}$.

corrigé en 4.4.5

↺ 1

Exercice 9 *convolution par une gaussienne*
On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x^2}$ et, pour $s > 0$, on pose

$$\theta_s(x) = \frac{1}{s\sqrt{\pi}} g\left(\frac{x}{s}\right).$$

1. Tracer les fonctions $\theta_{1/n}$, pour $n = 1, 2, ..5$, et étudier la limite de la suite de fonctions $(\theta_{1/n})_n$.
2. Calculer l'intégrale de θ_s sur $\mathbb{R}$. On rappelle que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}.$$

3. Pour f continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose

$$f \star \theta_s(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\theta_s(x-t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\theta_s(t)\, dt.$$

   (a) Justifier l'existence et l'égalité de ces expressions.
   (b) On suppose que f est, de plus, continue en x_0 et bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{s\to 0} f \star \theta_s(x_0) - f(x_0) = 0.$$

   On pourra observer que

$$f \star \theta_s(x_0) - f(x_0) = \int_{\mathbb{R}} f(x_0-t)\theta_s(t)\, dt - \int_{\mathbb{R}} f(x_0)\theta_s(t)\, dt.$$

   (c) Étudier la convergence uniforme.

corrigé en 4.4.6

Théorème 2 *formule de Fubini pour les fonctions intégrables* [2]
On suppose f continue et intégrable sur $I \times J$. Si
– pour tout x, la fonction $y \to f(x,y)$ est intégrable sur J,
– $g : x \to \int_J f(x,y)\, dy$ est continue par morceaux et intégrable sur I,
alors,

$$\iint_{I\times J} f = \int_I g.$$

Remarque : avec les hypothèses symétriques :
– pour tout y, la fonction $x \to f(x,y)$ est intégrable sur I,
– $h : y \to \int_I f(x,y)\, dx$ est continue par morceaux et intégrable sur J,
on obtient

$$\iint_{I\times J} f = \int_I g = \int_J h.$$

2. On comparera au théorème de Fubini pour les séries numériques...

Exercice 10 *transformation de Fourier, formule d'échange*

A toute fonction numérique f, continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, on associe sa transformée de Fourier définie par

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t}\,dt.$$

1. Justifier que $\hat{f}$ est continue et bornée.
2. Montrer que si f et g sont intégrables sur $\mathbb{R}$, il en va de même pour les fonctions $f \times \hat{g}$ et $g \times \hat{f}$.
3. On suppose f et g intégrables et continues sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction de deux variables

$$\phi(x,y) = f(x)g(y)e^{-ixy}$$

   est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^2$.
4. Sous ces hypothèses, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} f \times \hat{g} = \int_{\mathbb{R}} g \times \hat{f}.$$

Exercice 11 *transformée de Fourier et convolution*

On considère ici deux fonctions numériques $f$et g, continues et intégrables sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que, de plus, l'une des deux fonctions f ou g est bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \to f(x-t)g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction

$$h : x \to \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\ dt$$

   est continue sur $\mathbb{R}$. On commencera par le cas le plus simple.
2. Montrer que la fonction de deux variables

$$(x,t) \to f(x-t)g(t)$$

   est intégrable sur $\mathbb{R}^2$.
3. On définit l'intégrale de Fourier d'une fonction intégrable θ, en posant

$$\hat{\theta}\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega s}\theta(s)\ ds.$$

   Montrer que

$$\hat{f}(\omega) \times \hat{g}(\omega) = \iint_{\mathbb{R}^2} \phi \ \text{ avec } \phi(x,t) = f(x-t)e^{-i\omega(x-t)}g(t)e^{-i\omega t}.$$

   Peut on établir la formule $\hat{h}(\omega) = \hat{f}(\omega) \times \hat{g}(\omega)$, lorsque h est la fonction définie en 1, en apportant éventuellement des hypothèses supplémentaires ?

4.3 Transformée de Fourier et convolution : formulaire

• Si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, sa transformée de Fourier est définie sur $\mathbb{R}$, continue et bornée sur $\mathbb{R}$ sa limite est nulle en $\pm\infty$: $\lim_{\omega\to+\infty} \hat{f}(\omega) = 0$ et on a les formules suivantes :

• lorsque la transformée est définie par $\boxed{\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x}\, f(x)\, dx,}$

Si f et $x \to xf(x)$ sont intégrables,	$\dfrac{d\hat{f}(\omega)}{d\omega}$	=	$-i \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x} x\, f(x)\, dx$
Si f et f' sont intégrables,	$\widehat{f'}(\omega)$	=	$i\,\omega \hat{f}(\omega)$
Si $g_a(t) = e^{-at^2}$,	$\widehat{g_a}(\omega)$	=	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\ \mathrm{e}^{\frac{-\omega^2}{4a}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\ g_{1/4a}(\omega)$
Si $f, g, f * g$ sont (définies) et intégrables,	$\widehat{f * g}$	=	$\hat{f} \times \hat{g}.$

• lorsque la transformée est définie par $\boxed{\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\omega x} f(x)\ dx,}$

Si f et $x \to xf(x)$ sont intégrables,	$\dfrac{d\hat{f}(\omega)}{d\omega}$	=	$-2\, i\, \pi \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-2\, i\, \pi\, \omega x} x\, f(x)\, dx$
Si f et f' sont intégrables,	$\widehat{f'}(\omega)$	=	$2\, i\, \pi\, \omega \hat{f}(\omega)$
Si $g_a(t) = e^{-at^2}$,	$\widehat{g_a}(\omega)$	=	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\ \mathrm{e}^{\frac{-\pi^2\, \omega^2}{a}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\ g_{\pi^2/a}(\omega)$
Si $f, g, f * g$ sont (définies) et intégrables,	$\widehat{f * g}$	=	$\hat{f} \times \hat{g}.$

$\circlearrowleft$ 1

4.4 Les corrigés et démonstrations des sous-sections (4.1) et (4.2)

Corrigé n° 4.4.1 de l'exercice 4 *(intégrale de Fourier)*

1. Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, $t \to f(t)e^{-i\omega t}$ l'est aussi : elles ont le même module.
2. Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$,
$$|\hat{f}(\omega)| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t}\,dt\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt$$
on a donc $||\hat{f}||_\infty \leq ||f||_1$.
3.
$$\begin{aligned}\hat{\chi}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t}\chi(t)\,dt = \int_a^b e^{-i\omega t}\,dt\\ &= \begin{cases}(b-a) & \text{si } \omega = 0\\ \dfrac{i}{\omega}\left[e^{-i\omega t}\right]_a^b & \text{si } \omega \neq 0\end{cases}\\ &= \begin{cases}(b-a) & \text{si } \omega = 0\\ \dfrac{2}{\omega}\sin\left(\frac{b-a}{2}\omega\right)e^{-i\frac{b-a}{2}\omega} & \text{si } \omega \neq 0\end{cases}\end{aligned}$$
Cette fonction a pour module $2\left|\dfrac{\sin\left(\frac{b-a}{2}w\right)}{w}\right|$ dont on sait qu'elle n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ (mais elle admet une intégrale impropre).

Corrigé n° 4.4.2 corrigé 5 *(lemme de Riemann Lebesgue)*

1. Les fonctions en escalier : si ϕ est une fonction en escalier attachée à la subdivision $(t_j)_j$ du segment $[a,b]$, on a
$$\left|\int_a^b \phi(t)e^{int}\,dt\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \alpha_k\, e^{int}\,dt\right|$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} |\alpha_k|\left|\frac{e^{int_{k+1}} - e^{int_k}}{in}\right|\,dt \leq \frac{2}{n}\sup|\alpha_k||b-a|.$$
La limite est bien 0 lorsque $n \to +\infty$.
2. Considérons maintenant f continue par morceaux sur $[a,b]$ et $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction en escalier qui vérifie $||f-\phi||_{\substack{\infty\\ [a,b]}} \leq \varepsilon/|b-a|$. Nous avons par ailleurs
$$\left|\int_a^b f(t)e^{int}\,dt\right| \leq \left|\int_a^b (f(t)-\phi(t))e^{int}\,dt\right| + \left|\int_a^b \phi(t)e^{int}\,dt\right|.$$
   - Le premier terme du membre de droite est majoré par ε;
   - Pour le second, on sait qu'il existe un rang N_ε à partir duquel
$$\left|\int_a^b \phi(t)e^{int}\,dt\right| \leq \varepsilon.$$

En conséquence, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N_ε tel que

$$n \geq \varepsilon \Rightarrow \left| \int_a^b f(t)e^{int}\,dt \right| \leq 2\varepsilon.$$

3. Considérons maintenant une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle quelconque $I \subset \mathbb{R}$, et $\varepsilon > 0$. Il existe un segment $[a,b] \subset I$ tel que

$$\left| \int_I |f| - \int_{[a,b]} |f| \right| \leq \varepsilon.$$

On a :

$$\begin{aligned} \left| \int_I f(t)e^{int}\,dt \right| &= \left| \int_{[a,b]} f(t)e^{int}\,dt \right| + \left| \int_{I\setminus[a,b]} f(t)e^{int}\,dt \right| \\ &\leq \left| \int_{[a,b]} f(t)e^{int}\,dt \right| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme dans la démonstration précédente, il existe un rang N_ε à partir duquel

$$\left| \int_a^b f(t)e^{int}\,dt \right| \leq \varepsilon,$$

et on conclut de la même façon.

Corrigé n° 4.4.3 de l'exercice 6 *(dérivation et transformation de Fourier)*

1. On considère une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$ de transformée de Fourier définie par $\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$. La fonction $(\omega, t) \to f(t)e^{-i\omega t}$ satisfait clairement au théorème de continuité d'une intégrale à paramètre
– $g := t \to f(t)e^{-i\omega t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$;
– $\omega \to f(t)e^{-i\omega t}$ est continue ;
– il existe une majoration uniforme $|f(t)e^{-i\omega t}| \leq |f(t)|$ par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.
Par contre, pour la dérivation sous le signe somme, rien n'assure que

$$\frac{\partial}{\partial \omega} g(\omega) = -i\omega f(t)e^{-i\omega t}$$

vérifie les mêmes hypothèses. On supposera donc pour aller plus loin dans les calculs que de plus, $t \to tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors
– $g := t \to \dfrac{\partial}{\partial \omega} g(\omega) = -i\,t\,f(t)e^{-i\omega t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$;
– $\omega \to \dfrac{\partial}{\partial \omega} g(\omega) f(t)e^{-i\omega t}$ est continue ;
– il existe une majoration uniforme $\left| \dfrac{\partial}{\partial \omega} g(\omega) \right| \leq |t\,f(t)|$ par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.
Donc, si $f(t)$ et $tf(t)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{d\hat{f}(\omega)}{d\omega} = -i \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x}\,x\,f(x)\,dx$$

2. On suppose maintenant que f est intégrable et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f' est intégrable elle aussi. On peut donc définir la transformée de Fourier de f' qui est

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = \hat{f}'(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x} f'(x)\ dx.$$

On est alors tenté d'intégrer par parties. Cela donnerait

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = \left[e^{-i\omega x} f(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} + i\omega \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega x} f(x)\ dx.$$

Dans cette formule les deux intégrales sont définies. En conséquence la partie toute intégrée a elle même un sens lorsque f et f' sont toutes deux intégrables. Pour se convaincre que cette limite est nulle on intègre les mêmes fonctions sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par exemple. Cela montre que

$$\int_0^{+\infty} e^{-i\omega x} f'(x)\ dx = \left[e^{-i\omega x} f(x)\right]_0^{+\infty} + i\omega \int_0^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\ dx$$

et là on voit clairement que si la partie toute intégrée a une limite, $\lim_{+\infty} f = 0$.

3. Le formulaire est en page 20

Corrigé n° 4.4.4 de l'exercice 7 *(transformée d'une gaussienne)*

1. $\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} e^{-at^2}\, dt = \int_{\mathbb{R}} h(\omega, t)\, dt$.
   La fonction h admet des dérivées partielles par rapport à ω à tous les ordres qui sont

$$\frac{\partial^k}{\partial \omega^k} h(\omega, t) = (-i\, t)^k\, e^{-i\omega t} e^{-at^2} = h_k(\omega, t).$$

   Pour tout $k \geq 0$, on a
   - $t \to h_k(\omega, t)$ intégrable sur $\mathbb{R}$;
   - $t \to h_k(\omega, t)$ continue sur $[-A, A]$;
   - il existe ϕ_k, intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que pour $(\omega, t) \in [-A, A] \times \mathbb{R}$, $|h_k(\omega, t)| = |t|^k e^{-at^2} \leq A^k e^{-at^2} = \phi_k(t)$.
     Ainsi, $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout $[-A, A]$ et donc sur $\mathbb{R}$ et $\hat{f}'(\omega) = \int_{\mathbb{R}} h_1(\omega, t)\, dt$.

2. En dérivant, nous avons

$$\begin{aligned} \hat{f}'(\omega) = \int_{\mathbb{R}} h_1(\omega, t)\, dt = -i \int_{\mathbb{R}} \left(te^{-at^2}\right) e^{-i\omega t}\ dt \\ = -i \left[\frac{e^{-at^2}}{-2a}\, e^{-i\omega\, t}\right]_{-\infty}^{\infty} + i \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-at^2}}{-2a} (-i\omega) e^{-i\omega t}\ dt \end{aligned}$$

   ce qui nous donne l'équation différentielle $y'(\omega) = -\dfrac{\omega}{-2a} y(\omega)$ assortie de la condition initiale $y(0) = \hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2}\ dt$, d'où, après calcul de l'intégrale de Gauss

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \tag{4.3}$$

Corrigé n° 4.4.5 de l'exercice 8 *(convolution)*

1.
2.

Corrigé n° 4.4.6 de l'exercice 9 *(convolution par une gaussienne)*

1.
2.

↺ 1

4.5 L'équation de la chaleur, le premier retour : solutions sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^+$

On se propose ici d'étudier le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) & = g(x,t) \text{ pour tout } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ \\ u(x,0) & = f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.4}$$

On cherchera d'éventuelles solutions de ce système en calculant la transformée de Fourier de la fonction

$$x \to \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)$$

ce qui nous ramène à une équation différentielle ordinaire vérifiée par la transformée de Fourier $\phi_t : x \in \mathbb{R} \to u(x,t)$ pour un paramètre $t > 0$. Cette approche conduit aux théorèmes 3 et 4.

Théorème 3 *problème homogène, solution fondamentale*

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ par $u : (x,t) \to \dfrac{1}{2\sqrt{\pi\, D\, t}} e^{-\dfrac{x^2}{4Dt}}$

– u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$,

– u est solution de l'équation $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) = 0$ sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$,

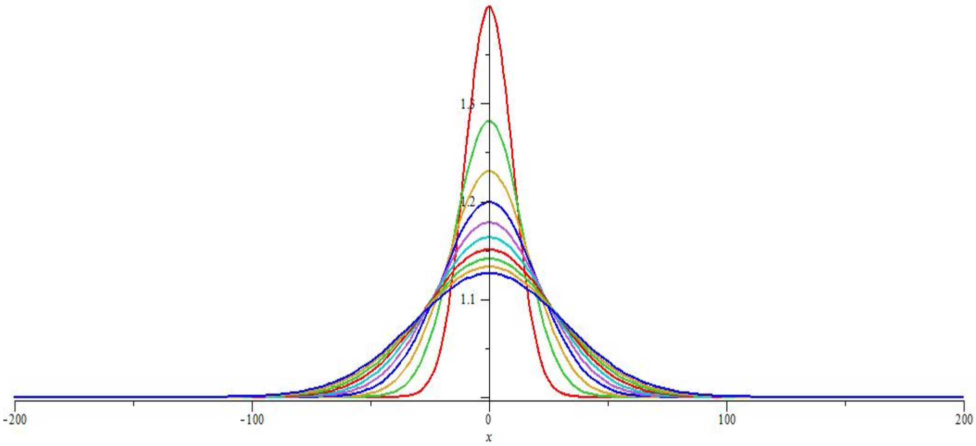
– pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = 0$ et lorsque $x = 0$, $\lim_{t\to 0^+} u(0,t) = +\infty$,

– pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\, dx = 1$ et, si $a > 0$, $\lim_{t\to 0^+} \displaystyle\int_{[-a,a]} u(x,t)\, dx = 1$

Démonstration
Simple vérification.

□

C'est toutefois avec l'exercice 12, où son rôle dans la résolution du problème de Cauchy (qui lui vaut le nom de **solution fondamentale** de l'équation de la chaleur) est mis en évidence, que **cette solution apparait naturellement.**



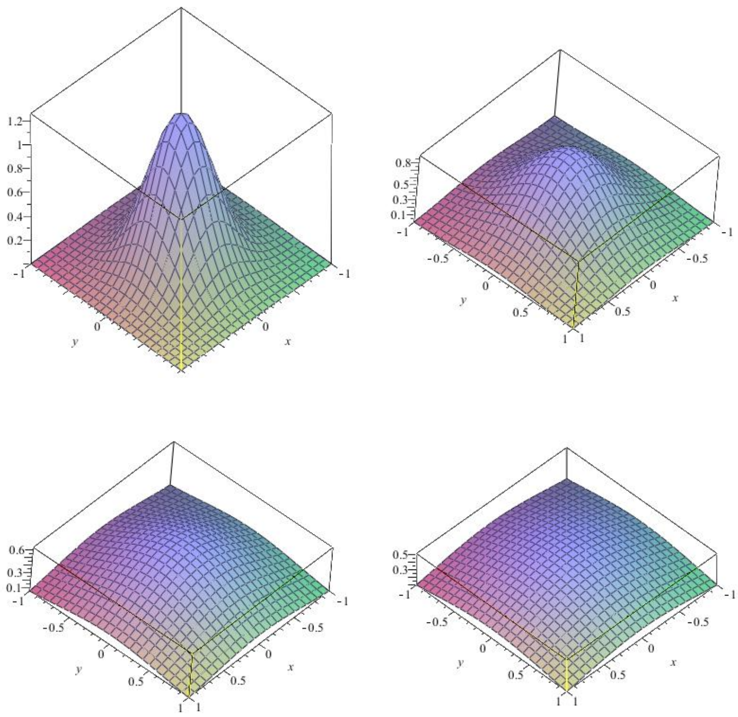
pour t de 1 à 10 $(D = 1/50)$

Solution fondamentale de l'équation en dimension n
En dimension $n \geq 2$, où l'équation de diffusion homogène s'écrit

$$\Delta u(x,t) - \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = 0,$$

une solution est donnée par une formule en tout point analogue à la précédente :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} e^{\dfrac{-\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{4\,D\,t}} \tag{4.5}$$



$d = 1, t = 0.05, 0.1, 0.2, 0.3...$

Théorème 4 *une approche du problème (4.4)*
Soit f une fonction bornée et continue sur $\mathbb{R}$. Alors, la fonction u définie sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ par

$$u(x,t) = f * \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\, g_{1/4Dt}\right)(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \int_{\mathbb{R}} f(s)\, e^{\dfrac{-(x-s)^2}{4Dt}}\, ds \qquad (4.6)$$

est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) - \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial}{\partial t} u(x,t) & = 0 \text{ pour tout } t>0, x\in\mathbb{R} \\ \lim_{t\to 0^+} u(x,t) & = f(x) \text{ pour tout } x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Démonstration
La démonstration est détaillée dans l'exercice 12 en même temps que l'on introduit la solution fondamentale du théorème 3. Le calcul de limite lorsque t tend vers 0^+, fait appel à l'exercice 9.

Exercice 12 *preuves des théorèmes 3 et 4*

On fait appel ici aux propriétés de la transformation de Fourier énoncées dans la formulaire de la page 20 et justifiées dans les exercices des sous-sections (4.1) et (4.2).

On considère une fonction $(x,t)\in\mathbb{R}\times T\to u(x,t)\in\mathbb{R}$.
On la supposera au moins de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à x et de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à t. L'intervalle T sera tantôt $T=]0,+\infty[$ tantôt $T=[0,+\infty[$ dans les questions qui suivent.

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction
$$x\to \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)$$
en fonction de celle de $\phi_t : x\to u(x,t)$. Expliciter des hypothèses qui garantissent la validité des calculs effectués.
2. On suppose que ces hypothèses sont satisfaites et que, de plus, u est solution de l'équation aux dérivées partielles
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = 0$$
En déduire une équation différentielle vérifiée par la fonction de la variable t définie par
$$\alpha_\omega(t) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\, e^{-i\omega x}\, dx\,.$$
En déduire une expression de cette fonction (penser que les constantes d'intégration dépendent du paramètre ω!)
3. On suppose dans cette question que $T=]0,+\infty[$ et que $\alpha_\omega(t) = \hat{\phi_t}(\omega) = B\, e^{-D\omega^2 t}$. Vérifier que c'est la transformée de Fourier d'une gaussienne que l'on précisera. En déduire que l'expression de $u(x,t)$ sur l'ouvert $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ est celle proposée dans le théorème 3.

4. On considère alors la fonction $v : (x,t) \to a + \dfrac{b}{2\sqrt{\pi\, D\, t}} e^{-\dfrac{x^2}{4Dt}}$

   Définir de façon pertinente un prolongement de cette fonction à $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$. La fonction obtenue est elle continue en $(x,t) = (0,0)$?
   Peut on définir, au moins sur une partie de $[0, +\infty[\times[0, +\infty[$, une solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) - \dfrac{1}{D} \dfrac{\partial}{\partial t} u(x,t) & = 0 \\ u(x,0) & = a \text{ pour tout } x > 0 \end{cases}$$

   Préciser a et b le cas échéant, étudier la régularité d'une telle solution sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$.

5. On suppose maintenant que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et intégrable sur $\mathbb{R}$, (de même que f' et f”).
   Prouver que le problème (4.4) admet une solution

   Indication :

   Monter que l'on peut exprimer $u(x,t)$ comme le prolongement d'un produit de convolution de f et d'une gaussienne que l'on précisera. On étudiera à nouveau la régularité de la fonction obtenue (on pourra pour cela jeter un œil à l'exercice 9).

corrigé en 4.6.1

Théorème 5 *équation avec second membre*
Soient $D > 0$, f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ de telle sorte que
- f est continue et bornée sur $\mathbb{R}$;
- g est continue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$;
- $x \to g(x, t)$ est continue par morceaux et bornée sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \geq 0$;

Alors, la fonction u définie sur $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$ par

$$u(x,t) = \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} g(y, t-\tau) \frac{e^{\frac{-(x-y)^2}{4D\tau}}}{2\sqrt{\pi D\tau}}\, dy \right) d\tau + \int_{\mathbb{R}} f(y)\, \frac{e^{\frac{-(x-y)^2}{4Dt}}}{2\sqrt{\pi Dt}}\, dy \tag{4.7}$$

est une fonction deux fois dérivable par rapport à x, dérivable par rapport à t, telle que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) - \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial}{\partial t} u(x,t) & = g(x,t) \text{ pour tout } t > 0, x \in \mathbb{R} \\ \\ \lim_{t \to 0^+} u(x,t) & = f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Démonstration Elle fait l'objet des exercices 13 et 14.

Exercice 13 ** *un résultat préliminaire, sans souci de rigueur*
Dans cet exercice on admettra le résultat suivant (qui n'est pas du L2, sinon sous une forme tarabiscotée) :

Théorème de Fubini *: Soit f une fonction définie sur $I \times J$ produit de deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si f est intégrable sur $I \times J$, alors*
- *$x \in I \to f(x, y)$ est intégrable sur I pour presque tout $y \in J$;*
- *$y \in J \to \int_I f(x, y)\, dx$ est (définie presque partout sur J et) intégrable sur J;*
- *$y \in J \to f(x, y)$ est intégrable pour presque tout $x \in I$;*
- *$x \in I \to \int_J f(x, y)\, dy$ est intégrable sur I;*
- *Enfin,*

$$\int_J \left(\int_I f(x,y)\, dx \right) dy = \int_I \left(\int_J f(x,y)\, dy \right) dx \tag{4.8}$$

Mode d'emploi : soit ce résultat vous est connu de même que les notions de *presque tout, presque partout* et vous appliquez ce théorème, soit (ce sera le cas si vous n'avez pas étudié de théorie de l'intégration -c'est du L3 -) et alors vous admettez sans vergogne la formule (4.8) lorsque le besoin s'en fait sentir dans l'exercice.

□

1. Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. On suppose que $t \to h(x, t)$ est continue par morceaux (ou localement intégrable) pour (presque) tout $x \in \mathbb{R}$. On définit alors une fonction H en posant
$$H(x,t) = \int_0^t h(x,s)\, ds$$

(a) Donner une condition suffisante portant sur h pour que $x \to H(x,t)$ admette une transformée de Fourier.

(b) On suppose h intégrable sur $\mathbb{R} \times [0,t]$ pour tout $t \geq 0$. Montrer que la transformée de Fourier de $x \to H(x,t)$ est

$$\widehat{H_t}(\omega) = \int_0^t \hat{h_s}(\omega)\, ds$$

où $\hat{h_s}$ est la transformée de Fourier de $x \to h(x,s)$.

2. Montrer que sous certaines conditions à préciser

$$\omega \to \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} \zeta(x,s) e^{-i\omega x}\, dx \right) e^{-D\omega^2(t-s)}\, ds$$

est la transformée de Fourier d'une fonction $x \to u(x,t)$ que l'on explicitera.

Indications : outre la question 1, penser à la transformée de Fourier d'un produit de convolution, d'une gaussienne. Voir pour cela le formulaire 20.

corrigé en 4.6.2

Exercice 14 *preuve du théorème 5*

Comme dans l'exercice 12, on considère une fonction $(x,t) \in \mathbb{R} \times T \to u(x,t) \in \mathbb{R}$ que l'on suppose au moins de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à x et de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à t. On suppose par ailleurs que pour tout $t \geq 0$, $x \to g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$x \to \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) - \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - g(x,t)$$

en fonction de celle de $\phi_t : x \to u(x,t)$ et en explicitant des hypothèses qui garantissent la validité des calculs effectués.

2. On suppose que ces hypothèses sont satisfaites et que, de plus, u est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) - \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = g(x,t)$$

En déduire une équation différentielle vérifiée par la fonction de la variable t définie par

$$\alpha_\omega(t) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\, e^{-i\omega x}\, dx\,.$$

3. En déduire α_ω et montrer qu'elle est transformée de Fourier de la solution annoncée dans le théorème 5 (utiliser les résultats de l'exercice 13).

4. Ce qui précède fait apparaitre la fonction de la formule (4.7). Démontrer qu'il s'agit bien d'une solution du problème avec second membre et condition initiale

corrigé en 4.6.3

4.6 Les corrigés et démonstrations de la sous-section 4.5

Corrigé n° 4.6.1 de l'exercice 12.

1. Notons $\phi_t : x \to u(x,t)$ et transformons $x \to \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t)$.
   Nous avons bien envie d'écrire

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)e^{-i\omega x}\,dx - \frac{1}{D}\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t)e^{-i\omega x}\,dx$$
$$= -\omega^2 \int_{\mathbb{R}} u(x,t)e^{-i\omega x}\,dx - \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} u(x,t)e^{-i\omega x}\,dx$$

   Pour ce qui est de la première intégrale, il s'agit de la transformée de Fourier d'une dérivée seconde, les hypothèses ci-dessous justifient l'égalité :
   $x \to u(x,t), x \to \dfrac{\partial}{\partial x}u(x,t)$, et $x \to \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$ sont intégrables pour tout $t \in T$.

   Pour ce qui est de la seconde intégrale, la dérivation sous le signe somme dérive des hypothèses :
   $x \to u(x,t), x \to \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t)$, sont continues sur $\mathbb{R}$;
   $t \to u(x,t), t \to \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t)$, sont continues par morceaux sur T;
   Pour tout segment $[t_0, t_1] \subset T$, il existe deux fonctions ϕ_0 et ϕ_1 intégrables sur $\mathbb{R}$ telles que $|u(x,t)| \leq \phi_0(x)$ et $\left|\dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right| \leq \phi_1(x)$ pour tous $x \in \mathbb{R}, t \in [t_0, t_1]$.

2. Sous ces (fastidieuses) hypothèses, $\alpha(t) = \hat{\phi}_t(\omega)$ vérifie l'équation différentielle

$$\alpha'(t) + D\omega^2\alpha(t) = 0$$

   lorsque u est solution de notre problème. Nous avons donc

$$\alpha(t) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,e^{-i\omega x}dx = B(\omega)\,e^{-D\omega^2 t} \tag{4.9}$$

3. **Cas où B est constante**. Rappelons que la transformée de Fourier d'une gaussienne est donnée par la formule $\boxed{\hat{g_a}(\omega) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\; g_{1/4a}(\omega).}$
   Ainsi, lorsque $B(\omega)$ est constante, on reconnait en $\alpha(t)$ la transformée de Fourier d'une fonction Kg_a, soit :

$$\alpha(t) = Be^{-D\omega^2 t} = \widehat{Kg_a}(\omega) = K\sqrt{\frac{\pi}{a}}g_{1/4a}(\omega)$$

   On a donc $a = \dfrac{1}{4Dt}$ et $\boxed{u(x,t) = K\,e^{-\dfrac{x^2}{4Dt}} = \dfrac{B}{\sqrt{4\pi\,D\,t}}e^{-\dfrac{x^2}{4Dt}}.}$

• On montre par un simple calcul que cette fonction est solution de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et qu'elle vérifie les propriétés de régularité et d'intégrabilité, que nous avons admises pour faire les calculs de la question 1.

• Il est clair que lorsque $x \neq 0$, $\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = 0$ et que $\lim_{t\to 0^+} u(0,t) = +\infty$.
La fonction n'est donc pas continue en $(0,0)$.

• De $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$, on déduit à l'aide d'un changement de variable évident :

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\,D\,t}}\int_R e^{-\dfrac{x^2}{4Dt}}\,dx = 1 \text{ et si } a>0,\ \lim_{t\to 0^+}\int_{[-a,a]} u(x,t)\,dx = 1$$

4. Une fonction $\boxed{v:(x,t)\to a+\dfrac{b}{2\sqrt{\pi\,D\,t}}e^{-\dfrac{x^2}{4Dt}}}$ est somme de deux solutions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, c'est donc encore une solution puisque l'équation est linéaire.
On observe que lorsque $x\neq 0$, $\lim_{t\to 0+} v(x,t) = a$. Prolongeons donc v à $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$ en posant $v(x,0)=a=T_0$.
• La fonction

$$\begin{cases} v(x,t) &= a+\dfrac{b}{2\sqrt{\pi\,D\,t}}e^{-\dfrac{x^2}{4Dt}} \\ v(x,0) &= a \end{cases}$$

est donc une solution de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$.
• Existence des dérivées partielles par rapport à x :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}v(x,t) &= \dfrac{-b}{4}\left(\dfrac{x}{Dt\sqrt{\pi\,D\,t}}\right)e^{-x^2/4Dt} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}v(x,0) &= 0 \end{cases}$$

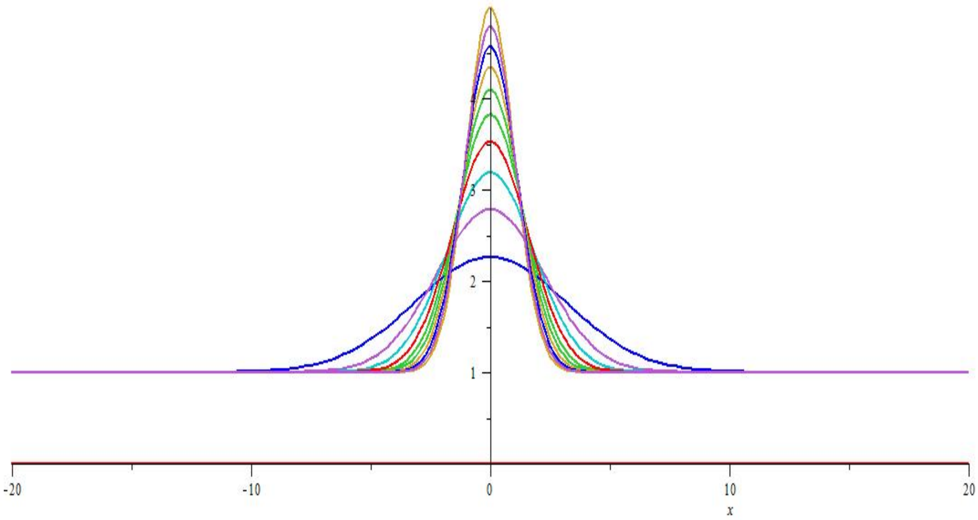
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,t) &= \dfrac{-b}{8}\left(\dfrac{2Dt-x^2}{D^2t^2\sqrt{\pi Dt}}\right)e^{-x^2/4Dt} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,0) &= 0 \end{cases}$$

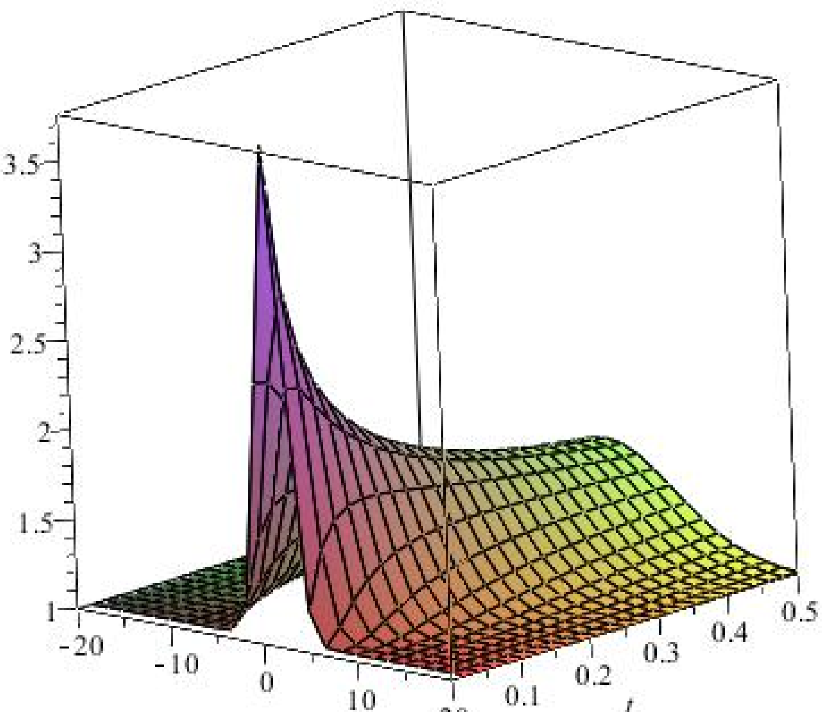
• Lorsque $x\neq 0$, la fonction $t\to v(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$:
elle est continue par construction et dérivable y compris en $t=0$ puisque

$$\frac{\partial}{\partial t}v(x,t) = \frac{-b}{8}\left(\frac{2Dt-x^2}{D\ t^2\sqrt{\pi Dt}}\right)\ e^{-x^2/4Dt}$$

admet 0 pour limite 0 lorsque t tend vers 0 (théorème limite de la dérivée).
• **Par contre,** v **n'est pas continue en** $(0,0)$ comme le montre le calcul des limites en 0 de $t\to v(0,t), x\to v(x,0)$...

lorsque $t\to 0, (a=1, b=10, D=50)$





vision 3d : discontinuité en $(0,0)$, limite lorsque $t \to 0+$

5. Revenons à la formule (4.9). Si la fonction $u(x,t)$ est solution sur $\mathbb{R} \times [0,+\infty[$ et satisfait les hypothèses retenues dans la première question, la formule (4.9) devient

$$B(\omega) = \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\, e^{-i\omega x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-i\omega x} dx = \hat{f}(\omega)$$

ce qui suppose que f admet une transformée de Fourier.
Nous avons alors pour $t > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(t) = \hat{\phi}_t(\omega) = \hat{f}(\omega) \times e^{-D\omega^2 t}$$

D'après la formule de convolution (formulaire page 20),

$$\hat{\phi}_t(\omega) = \hat{f}(\omega) \times e^{-D\omega^2 t} = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\ \widehat{f * g_a}(\omega)$$

toujours avec $a = \dfrac{1}{4Dt}$ (voir question précédente) et par injectivité de la transformation de Fourier sur les fonctions intégrables et continues,

$$u(x,t) = f * \left(\sqrt{\frac{a}{\pi}} g_a\right)(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \int_{\mathbb{R}} f(s)\, e^{\dfrac{-(x-s)^2}{4Dt}}\ ds \tag{4.10}$$

Cette fonction est solution de l'équation sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$.
On observe que (voir l'exercice 9),

$$\lim_{t\to 0^+} f * \left(\sqrt{\frac{a}{\pi}} g_a\right)(x) = f(x)$$

Synthèse
La fonction définie par la formule (4.10) sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et par $u(x,0) = f(x)$
- satisfait l'équation sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ par construction ;
- vérifie $\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = f(x) = u(x,0)$;
- $x \to u(x,0) = f(x)$ est de classe $\mathcal{C}^{2;}$

Corrigé n° 4.6.2 de l'exercice 13.

1. Soit H telle que $H(x,t) = \int_0^t h(x,s)\,ds$.
   (a) $x \to H(x,t)$ admet une transformée de Fourier si elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.
   C'est en particulier le cas pour presque tout $t \in \mathbb{R}^+$ si h intégrable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.
   (b) Si h est intégrable sur $\mathbb{R} \times [0,t]$ pour tout $t \geq 0$, la transformée de Fourier de $x \to H(x,t)$ se réécrit (avec la formule de Fubini) :

$$\begin{aligned}\widehat{H_t}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t h(x,s)\,ds \right) e^{-i\omega x}\,dx \\ &= \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} h(x,s)\,e^{-i\omega x}\,dx \right) ds \\ &= \int_0^t \hat{h_s}(\omega)\,ds\end{aligned}$$

   où $\hat{h_s}$ est la transformée de Fourier de $x \to h(x,s)$.
2. Considérons alors

$$\omega \to \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} \zeta(x,s) e^{-i\omega x}\,dx \right) e^{-D\omega^2(t-s)}\,ds \tag{4.11}$$

   Nous reconnaissons alors
   - en $\int_{\mathbb{R}} \zeta(x,s)e^{-i\omega x}\,dx$ la transformée de Fourier de $\zeta_s : x \to \zeta(x,s)$;
   - en $e^{-D\omega^2(t-s)}$, celle de $x \to \dfrac{1}{\sqrt{4\pi D(t-s)}}\; e^{-x^2/4D(t-s)}$;
   - le produit $\left(\int_{\mathbb{R}} \zeta(x,s)e^{-i\omega x}\,dx\right) e^{-D\omega^2(t-s)}$ apparait donc comme la transformée de Fourier du produit de convolution $\zeta_s * g_{D(t-s)}$ défini par

$$\zeta_s * g_{D(t-s)}(x) = \int_{\mathbb{R}} \zeta(x-y,s) g_{D(t-s)}(y)\,dy \tag{4.12}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} \zeta(x-y,s) e^{-y^2/4D(t-s)}\,dy \tag{4.13}$$

   Enfin, la question 1 nous suggère que (4.11) est la transformée de Fourier de

$$\int_0^t \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} \zeta(x-y,s) e^{-y^2/4D(t-s)}\,dy \right) ds$$

Corrigé n° 4.6.3 de l'exercice 14.
Soit $(x,t) \in \mathbb{R} \times T \to u(x,t) \in \mathbb{R}$ au moins de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à x et de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à t.

1. La transformée de Fourier de la fonction

$$x \to \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - g(x,t)$$

est

$$-\omega^2 \int_{\mathbb{R}} u(x,t)e^{-i\omega x}\,dx - \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} u(x,t)e^{-i\omega x}\,dx - \int_{\mathbb{R}} g(x,t)e^{-i\omega x}\,dx$$

La validité des calculs effectués est assurée dès que la fonction u satisfait les hypothèses énumérées dans l'exercice 12 et que $t \to g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in T$.

2. Lorsque u est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = g(x,t)$$

la fonction α_ω vérifie l'équation linéaire à coefficients constants :

$$\alpha'_\omega(t) + D\omega^2\alpha_\omega = -D\int_{\mathbb{R}} g(x,t)e^{-i\omega x}\,dx (= -D\hat{g}_t(\omega)).$$

Le second membre est une fonction continue de la variable t dès lors que :
– $x \to g(x,t)$ est continue par morceaux (ou localement intégrable) sur $\mathbb{R}$ pour $t \in T$;
– $t \to g(x,t)$ est continue sur T pour tout $x \in \mathbb{R}$;
– il existe pour tout intervalle $[t_0,t_1] \subset T$, une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ dominant $x \to g(x,t)$, ie :$\forall t \in [t_0,t_1],\ \forall x \in \mathbb{R}, |g(x,t)| \leq \phi(x)$...

Dans ces conditions, α_ω s'exprime donc

$$\alpha_\omega(t) = -D\int_0^t \hat{g}_t(\omega)e^{-D(t-s)\omega^2}\,ds + C_0(\omega)e^{-Dt\omega^2}$$

3. • Comme nous le montrons dans l'exercice 13, le premier terme est la transformée de Fourier de

$$x \to -D\int_0^t \left(\frac{1}{\sqrt{4D\pi(t-s)}}\int_{\mathbb{R}} g(x-y,s)e^{-y^2/4D(t-s)}\,dy\right)\,ds$$

Deux changements de variables successifs permettent de réécrire cette fonction :

$$x \to D\int_0^t \left(\frac{1}{\sqrt{4D\pi\tau}}\int_{\mathbb{R}} g(x-y,t-\tau)e^{-y^2/4D\tau}\,dy\right)\,d\tau$$

$$x \to D\int_0^t \left(\frac{1}{\sqrt{4D\pi\tau}}\int_{\mathbb{R}} g(z,t-\tau)e^{-(x-z)^2/4D\tau}\,dz\right)\,d\tau$$

• Le second terme est la transformée de Fourier d'un produit de convolution dès lors que $C_0(\omega)$ est elle même une transformée de Fourier.

Nous voyons alors comment apparait l'expression proposée dans le théorème (5) : la première intégrale (double) donne une solution du problème avec second membre, nulle en 0, la seconde est une solution du problème homogène de limite $f(x)$ lorsque $t \to 0^+$ (et $x \neq 0$).

Bilan de la phase d'analyse :

4. **Une solution :** Posons avec $\boxed{k(x,t) = \dfrac{e^{\frac{-x^2}{4Dt}}}{2\sqrt{\pi D t}} = \sqrt{\dfrac{a}{\pi}}\; g_a(x) \text{ où } a = \dfrac{1}{4Dt}}$

$$u(x,t) = D\int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} g(y, t-\tau)\, k(x-y,\tau)\, dy\right) d\tau + \int_{\mathbb{R}} f(y)\; k(x-y,t)\, dy \tag{4.14}$$

$$= -D\int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} g(x-y, s)\, k(y,t-s)\, dy\right) ds + \int_{\mathbb{R}} f(y)\; k(x-y,t)\, dy \tag{4.15}$$

• Supposons que f soit continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, alors, le second terme définit une fonction $u_0(x,t)$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, qui est solution du problème homogène et telle que pour $x \neq 0$, $\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = f(x)$. C'est là une conséquence des propriétés d'un produit de convolution établies dans l'exercice 8 (et déjà mises en œuvre dans l'étude du problème homogène).

• Supposons que g soit bornée et par ailleurs **continue**.

Nous avons gardé deux expressions de l'intégrale double. Nous dériverons la première par rapport à x de telle sorte que les dérivées partielles de g n'apparaissent pas et la seconde par rapport à t pour la même raison.

Nous commentons et justifions plus loin les calculs formels effectués sous MAPLE et présentés ci-dessous.

>

Formules générales de dérivation d'une intégale à paramètre

```
> restart;
W := (x, t) → Int( f(x, t, s), s = 0 ..t);
diff(W(x, t), t);
diff(W(x, t), x, x);
```

$$W := (x, t) \to \int_0^t f(x, t, s)\, ds$$

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(x, t, s)\, ds + f(x, t, t)$$

$$\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t, s)\, ds \qquad (1$$

Une solution de l'équation de la chaleur avec second membre; Vérifications
(V et U sont identiques par changement de variables)

```
> U := unapply(Int(Int(d·g(y, t − tau)·k(x − y, tau), y = −infinity..infinity), tau = 0 ..t), (x, t));
D2x := simplify(diff(U(x, t), x, x));
```

$$U := (x, t) \to \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} d\, g(y, t-\tau)\, k(x-y, \tau)\, dy\, d\tau$$

$$D2x := \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} d\, g(y, t-\tau)\, D_{1,1}(k)(x-y, \tau)\, dy\, d\tau \qquad (2$$

```
> V := unapply(−Int(Int(d·g(x − y, s)·k(y, t − s), y = −infinity..infinity), s = 0 ..t), (x, t));
D1t := simplify(diff(V(x, t), t));
```

$$V := (x, t) \to -\left(\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} d\, g(x-y, s)\, k(y, t-s)\, dy\, ds\right)$$

$$D1t := -\left(\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} d\, g(x-y, s)\, D_2(k)(y, t-s)\, dy\, ds\right) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\, g(x-s, t)\, k(s, 0)\, ds\right) \qquad (3$$

Noyau de la chaleur

```
> restart;
```

$$k := (x, t) \to \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4\cdot d\cdot t}\right)}{2\cdot \mathrm{sqrt}(\mathrm{Pi}\cdot d\cdot t)};$$

$$k := (x, t) \to \frac{1}{2}\, \frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{x^2}{d\,t}}}{\sqrt{\pi\, d\, t}} \qquad (4$$

```
> diff(k(x, t), x, x) :
normal(%);
```

$$-\frac{1}{8}\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{x^2}{d\,t}}\left(2\,d\,t-x^2\right)}{d^2\,t^2\sqrt{\pi\,d\,t}} \qquad (5$$

> *diff*(*k*(*x*, *t*), *t*) :
> *simplify*(%);

$$-\frac{1}{8}\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{x^2}{d\,t}}\left(2\,d\,t-x^2\right)}{t^2\,d\sqrt{\pi}\,\sqrt{d\,t}} \qquad (6$$

<u>Une solution de l'équation de la chaleur avec second membre; Vérifications</u>
<u>(V et U sont identiques par changement de variables)</u>

> *U* := *unapply*(*Int*(*Int*(*d*·*g*(*y*, *t* − tau)·*k*(*x* − *y*, tau), *y* =−*infinity*..*infinity*), tau = 0 ..*t*), (*x*, *t*));
> *D2x* := *simplify*(*diff*(*U*(*x*, *t*), *x*, *x*));

$$U := (x,t) \rightarrow \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{d\,g(y,t-\tau)\,e^{-\frac{1}{4}\frac{(x-y)^2}{d\,\tau}}}{\sqrt{\pi\,d\,\tau}}\,dy\,d\tau$$

$$D2x := \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{8}\frac{g(y,t-\tau)\,e^{-\frac{1}{4}\frac{(x-y)^2}{d\,\tau}}\left(2\,d\,\tau-x^2+2\,x\,y-y^2\right)}{\tau^2\,d\sqrt{\pi}\,\sqrt{d\,\tau}}\right)dy\,d\tau \qquad (7$$

> *V* := *unapply*(−*Int*(*Int*(d·*g*(x − y, s)·*k*(*y*, *t* − *s*), y =−*infinity*..*infinity*), *s* = 0 ..*t*), (*x*, *t*));
> *D1t* := *simplify*(*diff*(*V*(*x*, *t*), *t*));

$$V := (x,t) \rightarrow -\left(\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{d\,g(x-y,s)\,e^{-\frac{1}{4}\frac{y^2}{d\,(t-s)}}}{\sqrt{\pi\,d\,(t-s)}}\,dy\,ds\right)$$

$$D1t := -\left(\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{8}\frac{\left(2\,d\,\_a+y^2-2\,d\,t\right)g(x-y,\_a)\,e^{\frac{1}{4}\frac{y^2}{d\,(-t+\_a)}}}{(-t+\_a)^2\sqrt{\pi}\,\sqrt{-d\,(-t+\_a)}}\,dy\,d\_a\right) - \left(\lim_{s\rightarrow t}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{d\,g(x-\_a,s)\,e^{\frac{1}{4}\frac{\_a^2}{d\,(-t+s)}}}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{-d\,(-t+s)}}\,d\_a\right)\right) \qquad (8$$

>

Commentaires et justifications des calculs

La numérotation est celle des paragraphes de la feuille de travail.

1. Simple rappel de la formule de dérivation lorsque le paramètre t apparait à la fois dans les bornes et dans la fonction à intégrer. C'est cette formule qui intervient lorsqu'on dérive u par rapport à t.
2. u et sa dérivée seconde par rapport à x - première expression (4.14) ; k formelle.
   On justifie tout d'abord que pour tous $0 < \tau \leq t$,
   $$x \to \int_{\mathbb{R}} g(y, t-\tau)\, k(x-y, \tau)\, dy$$
   est de classe $\mathcal{C}^2$. Voir les exercices sur la régularisation par convolution. On justifie ensuite que
   $$x \to \int_{]0,t]} \left(\int_{\mathbb{R}} g(y, t-\tau)\, k(x-y, \tau)\, dy \right) d\tau$$
   est aussi de de classe $\mathcal{C}^2$. L'hypothèse de domination est la plus délicate, l'hypothèse (forte dans les applications) selon laquelle g est bornée permet de se concentrer sur l'allure de $k(x, t)$. A FINIR.
3. u et sa dérivée première par rapport à t - deuxième expression (4.15) ; k formelle. Attention au malencontreux changement du nom de la variable d'intégration !
4. Noyau de la chaleur (solution fondamentale) ;
5. noyau de la chaleur, dérivée seconde par rapport à x;
6. noyau de la chaleur, dérivée première par rapport à t;
7. la fonction u et sa dérivée seconde par rapport à x; k explicite ;
8. la fonction u et sa dérivée première par rapport à t; k explicite.

La fonction k vérifie donc l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$ et après changements de variables (les mêmes que précédemment), dans le calcul de

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) - \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)$$

les intégrales doubles de (3) ou (8) et (2) ou (7) disparaissent et la limite de la formule (8) (donnée par le résultat de l'exercice 9 et un peu de travail supplémentaire) est $g(x, t)$ ce qui donne :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) - \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = g(x,t)$$

Le théorème 5 est donc démontré (avec des hypothèses sur f et g plus faibles que dans la phase d'analyse).

⥀ 1

5 Équation de la chaleur et transformée de Laplace

Pré-requis : un cours élémentaire sur les fonctions intégrables et les intégrales dépendant d'un paramètre (voir polycopiés)

5.1 Transformée de Laplace, point de vue élémentaire

Définition 3 *transformée de Laplace*
Soit f, une fonction numérique continue par morceaux (ou localement sommable) sur $]0, +\infty[$. La transformée de Laplace de f est la fonction $\mathcal{L}(f)$ définie sur l'ensemble complexes p tels que $t \to e^{-pt}f(t)$ admette une intégrale sur $]0, +\infty[$, par

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt \tag{5.1}$$

Théorème 6 *propriétés de la transformée de Laplace*
Soit f, continue par morceaux (ou localement intégrable) sur $]0, +\infty[$ et $q \in C$. On suppose que $\mathcal{L}(f)$ sa transformée de Laplace est définie pour le complexe q.
– $\mathcal{L}(f)$ est définie pour tout complexe p tel que $\Re(p) > \Re(q)$.
– Il existe un réel p_0 et un seul tel que $t \to e^{-pt}f(t)$

$$\begin{cases} \text{est intégrable sur }]0, +\infty[\text{ si } \Re(p) > p_0 \\ \text{n'admet pas d'intégrale (même impropre) si } \Re(p) < p_0 \end{cases}$$

On dit alors que p_0 est **l'abscisse de sommabilité** de $\mathcal{L}(f)$.
– La restriction de $\mathcal{L}(f)$ à $]p_0, +\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et l'on a

$$\frac{d^m}{dp^m}\mathcal{L}(f)(p) = (-1)^m\mathcal{L}(t^m f)(p). \tag{5.2}$$

Exercice 15
1. Intervalle de définition de $\mathcal{L}(f)$.
   (a) Montrer que, si pour $p = p_0 > 0$, la fonction $t \to f(t)e^{-pt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, alors $t \to f(t)e^{-pt}$ est intégrable pour tout $p > p_0$.
   (b) En déduire que si l'ensemble de définition de $\mathcal{L}f$ n'est pas vide, c'est un intervalle de $\mathbb{R}^+$.
   (c) Donner des exemples de fonctions f telles que $\mathcal{L}(f)$ soit définie exactement sur $[0, +\infty[$, $]0, +\infty[$, $[q, +\infty[$, $]q, +\infty[$, avec $q > 0$.
2. On considère les fonctions puissances $\gamma_k(x) = x^k$, k entier, et on se propose d'étudier

$$\mathcal{L}(\gamma_k)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\gamma_k(t)\,dt$$

   lorsque $p > 0$..
   (a) Calculer $\mathcal{L}(\gamma_k)(p)$.

(b) En déduire que toute fonction polynôme

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

admet une transformée de Laplace que l'on exprimera.

(c) Ecrire une relation concise entre la transformée de Laplace d'un polynôme nul en 0 et de son polynôme dérivé. Que dire si $P(0)$ est quelconque ?

3. On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, telle que
   - f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]0, +\infty[$ et admet des dérivées successives à droite en 0, notées $f'_d(0+), f''_d(0+), ...$
   - f admet une transformée de Laplace $p \to \mathcal{L}(f)(p)$ définie dans un voisinage $\mathcal{V}$ de $+\infty$
   - pour tout $j = 0, 1, ...k$, il existe $p_j \in \mathcal{V}$ tel que $t \to e^{-p_j t} f^{(j)}(t)$ soit intégrable sur $]0, +\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$.

   (a) Montrer que f' admet, elle aussi une transformée de Laplace définie sur $\mathcal{V}$, et que

   $$\mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0+).$$

   (b) Montrer que les dérivées d'ordre inférieur à k admettent des transformées de Laplace et vérifier la formule :

   $$\mathcal{L}(f^{(k)})(p) = p^k \mathcal{L}(f)(p) - \sum_{j=0}^{k-1} p^{k-1-j} f^{(j)}(0+). \tag{5.3}$$

II. Régularité des transformées de Laplace.

1. On suppose f continue. Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur son intervalle **ouvert** de définition.
2. Donner une condition suffisante sur f pour que $\mathcal{L}(f)$ soit de classe $\mathcal{C}^m$ et montrer qu'alors :

$$\frac{d^m}{dp^m}\mathcal{L}(f)(p) \quad = \quad (-1)^m \mathcal{L}(t^m f)(p). \tag{5.4}$$

III. Convergences des transformées de Laplace.

1. On considère l'ensemble F des fonctions continues par morceaux sur $]0, +\infty[$ pour lesquelles il existe $p > 0$ tel que

   $$(t \to e^{-pt} f(t))$$

   soit intégrable sur $]0, +\infty[$.

   (a) Montrer que F est un espace vectoriel.

   (b) On suppose que (f_n) est une suite de fonctions de F qui converge uniformément vers f continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
   - Montrer qu'il existe $q \geq 0$ tel que les transformées de Laplace des fonctions f_n et f soient définies sur $]q, +\infty[$.
   - Que peut on dire de la convergence de la suite de fonctions $\mathcal{L}(f_n)$ sur cet intervalle ?

2. Soit $(a_k)_k$ une suite de réels et
$$h(t) = \sum_{k\geq 0} a_k t^k.$$
On suppose que le rayon de convergence de la série entière est $R = +\infty$.
   (a) On suppose que h est bornée et qu'il existe $p > 0$ tel que la série
   $$\sum \frac{a_k k!}{p^{k+1}}$$
   converge. Que peut on affirmer ? En déduire une expression des transformées de Laplace de $cos(\sqrt{t})$ et de $sin(t)$. Pour cette dernière fonction comparer à un calcul direct.
   (b) On suppose que $a_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que h admet une transformée de Laplace ssi il existe $p > 0$ tel que la série
   $$\sum \frac{a_k k!}{p^{k+1}}$$
   converge. Donner alors une expression de $\mathcal{L}(h)$.

IV. Usage du dictionnaire, ce que vous faites en SI

Une fois la transformée de Laplace définie pour certaines fonctions, on établit un formulaire (du type de celui qui vous a été donné en SI), pour des fonctions définies sur $[0, \infty[$. Vous pouvez vérifier certaines de ces relations formelles n'oubliez pas de déterminer des conditions suffisantes d'existence d'une transformée ainsi que l'ensemble des valeurs de p pour lesquelles la transformée est définie.
On note H la fonction échelon (fonction de Heaviside).

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f')(p) &= \mathcal{L}(f)(p) - f(0) && (5.5)\\
\mathcal{L}(f^{(k)})(p) &= p^k \mathcal{L}(f)(p) - \sum_{j=0}^{k-1} p^{k-1-j} f^{(j)}(0) && (5.6)\\
\frac{d^m}{dp^m}\mathcal{L}(f)(p) &= (-1)^m \mathcal{L}(t^m f)(p) && (5.7)\\
\mathcal{L}(t^k))(p) &= \frac{k!}{p^{k+1}} && (5.8)\\
\mathcal{L}(\sin(\omega t))(p) &= \frac{\omega}{p^2+\omega^2} && (5.9)\\
\mathcal{L}(\cos(\omega t))(p) &= \frac{p}{p^2+\omega^2} && (5.10)\\
\mathcal{L}(f(t)e^{\alpha t})(p) &= \mathcal{L}(f)(p-\alpha) && (5.11)\\
\mathcal{L}(f(\alpha t))(p) &= \frac{1}{\alpha}\mathcal{L}(f)(\frac{p}{\alpha}) && (5.12)\\
\mathcal{L}(f(t-r)H(t-r))(p) &= \mathcal{L}(f)(p)e^{-tp} && (5.13)\\
\mathcal{L}(\frac{f(t)}{t})(p) &= \int_p^\infty \mathcal{L}(f)(x)\,dx && (5.14)
\end{aligned}$$

Ce dictionnaire permet alors de transformer des expressions linéaires en les dérivées d'une fonction f, en des expressions algébriques de la transformée de Laplace de f. Par exemple, l'expression

$$a\,y"(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = h(t) \qquad (5.15)$$

a pour transformée de Laplace :

$$a\,\mathcal{L}y"(t) + b\,\mathcal{L}y'(t) + c\,\mathcal{L}y(t) = \mathcal{L}h \tag{5.16}$$

La résolution de cette équation donne $\mathcal{L}f$, on retrouve f par lecture du dictionnaire et en sachant que la transformation est injective. En réalité la transformation de Laplace devient un outil pratique (théorèmes, formules valides) en introduisant des notions (distributions) qui vont bien au delà du niveau de CPGE, dont l'existence a été pressentie par certains physiciens (Dirac, Heaviside...) avant qu'on ne puisse les définir en mathématiques (Laurent Schwartz,...) et en développer toutes les applications.

Exercice 16 *Mettre en œuvre formellement la méthode décrite dans les cas suivants, justifiez la ensuite :*

1. $a\,y"(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = h(t)$
2. *Résoudre sur* $[0, \infty[$, *avec les conditions initiales :* $x(0) = 3, y(0) = 0$.

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases} \tag{5.17}$$

5.2 L'équation de la chaleur

Exercice 17 *mur de chaleur*
On se propose ici d'étudier le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) & = 0 \\ \\ u(x,0) & = f(x) \text{ pour tout } x > 0 \\ u(0,t) & = T_w \text{ pour tout } t > 0 \end{cases} \tag{5.18}$$

On cherchera d'éventuelles solutions de ce système en calculant la transformée de Laplace de la fonction

$$x \to \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)$$

ce qui nous ramène à une équation différentielle ordinaire vérifiée par la transformée de Laplace de $\phi_t : x \in [0, +\infty[\to u(x,t)$.

Exercice 18
On se propose ici d'étudier le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) - \alpha\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) & = -\beta(u(x,t) - u(x,0)) \\ \\ u(x,0) & = T_0 \text{ pour tout } x \in]0, x_0] \\ u(0,t) & = \theta(t) \text{ pour tout } t > 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}u(x_0,t) & = -\gamma(u(x_0,t) - T_0) \text{ pour tout } t > 0 \end{cases} \tag{5.19}$$

1. Réécritures...

(a) Vérifier que $u(x,t)$ est une solution du problème (5.19) ssi $v(x,t) := u(x,t) - T_0$ est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} v(x,t) - \alpha \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} v(x,t) & = -\beta\, v(x,t) \\ \\ v(x,0) & = 0 \text{ pour tout } x \in]0, x_0] \\ v(0,t) & = \theta(t) - T_0 \text{ pour tout } t > 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t} v(x_0,t) & = -\gamma\, v(x_0,t) \text{ pour tout } t > 0 \end{cases} \tag{5.20}$$

2. Nous noterons f_t la fonction $x \to u(x,t)$ et g_t la fonction $x \to \dfrac{\partial}{\partial t} u(x,t)$.
   (a) Donner une relation entre $\mathcal{L}(f_t)(p)$ et $\mathcal{L}(g_t)(p)$.
   (b) Exprimer la transformée de Laplace de chacun des deux membres de l'équation aux dérivées partielles.
   (c) On note $Y_p(t) = \mathcal{L}(f_t)(p)$. Écrire et résoudre l'équation différentielle vérifiée par Y_p.

Corrigé en 5.2.1

Corrigé n° 5.2.1 de l'exercice 18.

6 Équation de la chaleur et différences finies

Quiconque aura tenté de calculer un grand nombre de valeurs numériques de $u(x,t)$ avec la formule

$$u(x,t) = f * \left(\sqrt{\frac{a}{\pi}} g_a\right)(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi c t}} \int_{\mathbb{R}} f(s)\, e^{\dfrac{-(x-s)^2}{4ct}}\, ds$$

avec quelque logiciel que ce soit aura compris qu'il vaut mieux chercher autre chose, surtout en dimensions supérieures où la solution de $\Delta u(x,t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = 0$ s'exprime avec une intégrale multiple.
Les méthodes numériques s'imposent donc rapidement :

- **méthodes des différences finies** (elles sont présentées dans le chapitre 12 du livre [1], *Informatique en classes préparatoires scientifiques Programmer avec Python et calcul numérique*, publié chez Ellipses ;
- plus proche de l'état de l'art mais plus difficile à mettre en place (bien qu'il y ait un grand nombre de logiciels spécialisés), **la méthode des éléments finis** ;

Références

[1] THIERRY AUDIBERT, AMAR OUSSALAH
Informatique, Programmation et Calcul Scientifique
Ellipses, 2013

[2] A-S BONNET-BENDHIA, S. FLISS, P. JOLY, P. MOIREAU .
http ://wwwdfr.ensta.fr/Cours/docs/MA103/PolyMA103_2012.pdf
Introduction aux équations aux dérivées partielles et à leur approximation numérique ,
polycopiés de cours

[3] C. DAVEAU .
http ://www3.u-cergy.fr/daveau/M2-EDP-APPROX.pdf
Méthodes d'approximation des équations aux dérivées partielles,
polycopiés de cours

[4] C. P. FALL, E. S. MARLAND, J. M. WAGNER, J. J. TYSON .
Computational Cell biology
Springer, 2005

[5] E. EUVRARD .
Résolution numérique des équations aux dérivées partielles
Masson, 1994

[6] G.B. FOLLAND .
Introduction to partial differential equations
Princeton University Press, 1975

[7] C. GASQUET, P. WITOMSKI .
Analyse de Fourier et Applications
Masson, 1990

[8] P-Y LAGRÉE .
http ://www.lmm.jussieu.fr/∼lagree/COURS/MECAVENIR
Résolution de l'équation de la chaleur instationnaire,
polycopiés de cours

[9] J. D. MURRAY .
Mathematical Biology I : An Introduction
Springer, 2002

[10] J. D. MURRAY .
Mathematical Biology II : Spacial Models ans Biomedical Applications
Springer, 2003

[11] VICTOR P. PIKULIN, STANISLAV I. POHOZAEV .
Equation in Mathematical Physics
Birkhäuser, 2001

[12] O. POULIQUEN, Y. FORTERRE .
http ://www.cnrs.fr/publications/imagesdelaphysique/2001-02.htm
Ecoulements granulaires sur plan incliné

[13] W. RUDIN .
Analyse réelle et complexe
Masson, 1980

[14] L. SCHWARTZ .
Méthodes mathématiques pour les sciences Physiques
Hermann, 1993

[15] L. SCHWARTZ .
Analyse III - Calcul Intégral
Hermann, 1993

[16] L. SCHWARTZ .
Analyse IV - Applications de la Théorie de la Mesure
Hermann, 1993

Index