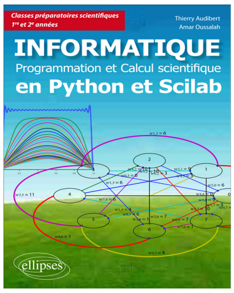
Suites récurrentes et méthode de Newton approche progressive

Ce document vient en complément du chapitre 6 du livre *Informatique, programmation et calcul scientifique en Python et Scilab*, publié chez ellipses. On démontre les résultats sur les suites récurrentes et la méthode de Newton qui font l'objet d'exploration numérique dans cet ouvrage.
La démarche est plus élémentaire et plus progressive que dans le document [1], lui aussi présent sur `univenligne.fr.`



L'objectif est bien entendu la méthode de Newton elle-même, exposée dans le cas des fonctions de la variable réelle avec l'exercice 6. Pour bien aborder cette étude, il nous semble qu'il y a deux étapes préalables :

- acquérir une certaine familiarité avec les suites récurrentes (ou systèmes dynamiques discrets) tant au niveau théorique (ce sont ici les exercices 1 à 6 qui y contribuent), qu'au niveau expérimental, et là : programmation et expérimentation sont de mise !
- programmer la méthode de Newton elle-même sur des exemples simples, ce qui motivera l'étude détaillée en vue d'établir la convergence quadratique. Nous renvoyons pour cela au chapitre 6 de notre manuel d'informatique et de calcul numérique.

1 Énoncés

Exercice 1 *Suite récurrentes, généralités*
Soit f définie sur un intervalle I et une suite $(u_n)_n$ telles que $u_{n+1} = f(u_n)$

1. On suppose f croissante, que dire de $(u_n)_n$?

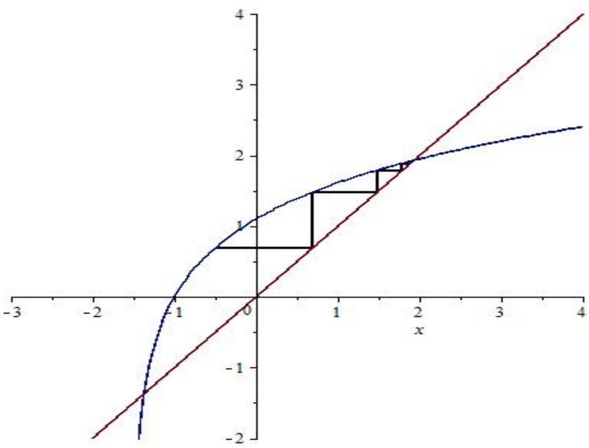


FIGURE 1 – $f := x \mapsto \ln(3 + 2x)$, croissante

2. On suppose f décroissante, que dire des suites $(v_n)_n = (u_{2n})_n$ et $(w_n)_n = (u_{2n+1})_n$?
3. Montrer que si f est décroissante et admet un point fixe p tel que $v_0 \leq p \leq w_0$, alors, pour tout n on a $v_n \leq p \leq w_n$.

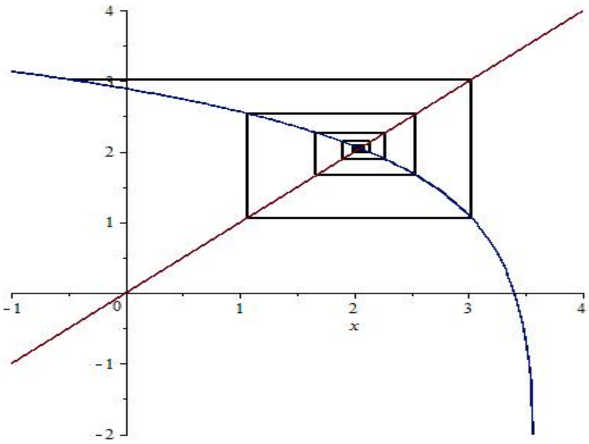


FIGURE 2 – $f := x \mapsto \ln(18 - 5\,x)$, décroissante

Corrigé en 2.0.1.

Exercice 2 *Existence d'un point fixe.*
Montrer que si f est continue sur $I = [a, b]$, fermé, borné et si $f(I) \subset I$, alors il existe $c \in I$ tel que $f(c) = c$.
Corrigé en 2.0.2.

Exercice 3 *points fixes attractifs et répulsifs*

1. Deux résultats préliminaires :
   (a) Soit g une fonction à valeurs réelles et continue sur un intervalle I. On suppose que pour un certain $x_0 \in I$, $g(x_0) < 1$. Montrer qu'il existe deux réels $\alpha > 0$ et $k < 1$ tels que pour tout $x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $g(x) < k$.
   Indication : écrire que g est continue au point x_0 :
   pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $x \in I$ et $|x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |g(x) - g(x_0)|| \leq \varepsilon$.
   Si vous choisissez bien ε, le tour est joué.
   (b) Soit g une fonction à valeurs réelles et continue sur un intervalle I. On suppose que pour un certain $x_0 \in I$, $g(x_0) > 1$. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ et $k > 1$ tels que pour tout $x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $g(x) > k$.
2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I et qu'elle admet un point fixe c en lequel $|f'(c)| < 1$ (on dit que le point fixe c est **attractif**).
   (a) Justifier qu'il existe un réel $k < 1$ et un ensemble $\{x \in I / \, |x - c| < \alpha\}$, sur lequel $|f'(x)| \leq k$.
   (b) On suppose que I est un voisinage de c, c'est à dire qu'il existe $\beta > 0$ tel que $]c - \beta, c + \beta[\subset I$.

Justifier qu'il existe un intervalle $J =]c - \delta, c + \delta[\subset I$ tel que $f(J) \subset J$.
Indication : choisir δ en fonction de α et de β et penser au théorème des accroissements finis.

(c) Montrer que pour tout $u_0 \in J$, la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ définit une suite d'éléments de J.

(d) Montrer qu'une telle suite vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; |u_n - c| \leqslant k^n \, |u_0 - c| \, .$$

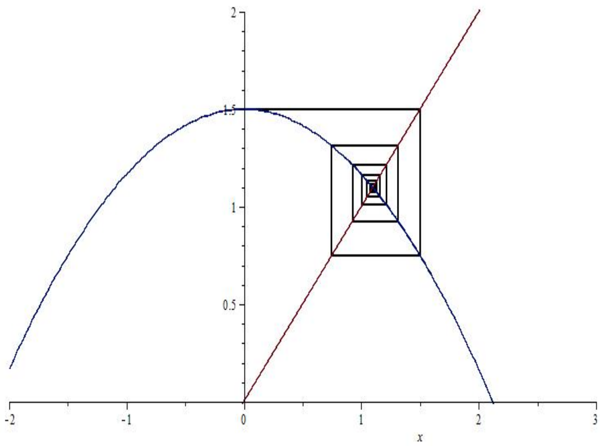


FIGURE 3 – $f := x \mapsto -1/3\, x^2 + 3/2$, point fixe attractif en $c = 1$.

3. On suppose maintenant que $|f'(c)| > 1$ (on dit que le point fixe c est **répulsif**).
   (a) Justifier qu'il existe un réel $k > 1$ et un intervalle $\{x \in I / |x - c| < \alpha\}$ sur lequel $|f'(x)| \geq k$.
   (b) Montrer que si une suite vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ et converge vers c, elle est stationnaire.

Corrigé en 2.0.3.

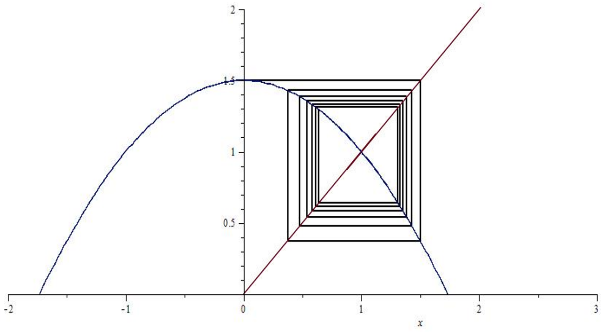


FIGURE 4 – $f := x \mapsto -1/2\,x^2 + 3/2$, point fixe répulsif en $c = 1$.

Exercice 4 *deux exemples sans indications : prenez le temps de chercher, les énoncés détaillés comme celui qui suit détruisent votre capacité à bâtir des scénarios ...*

1. A la lumière de l'exercice précédent, étudier la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi, k \in \mathbb{N}, \\ u_{n+1} & = \sin u_n \end{cases}$
2. Étudier de même la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = 1, \\ u_{n+1} & = \cos u_n \end{cases}$

Corrigé en 2.0.4.

Exercice 5 *les mêmes exemples avec des détails, mais commencez par chercher sans questions intermédiaires...*

1. On se propose d'étudier la suite $\begin{cases} u_0 & = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi, k \in \mathbb{N}, \\ u_{n+1} & = \sin u_n \end{cases}$
   (a) Représentez graphiquement la fonction sinus ainsi que l'identité.
   (b) Montrer qu'il existe un intervalle I stable par sin et tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in I$ (avec $I = [0, 1]$ ou $[-1, 0]$). Déterminer le signe de u_n.
   (c) Monter que la suite converge et préciser sa limite.
   (d) Montrer que $u_{n+1} - u_n \sim \dfrac{-u_n^3}{6}$.
2. On étudie maintenant la suite $\begin{cases} u_0 & = 1, \\ u_{n+1} & = \cos u_n \end{cases}$
   (a) Montrer que cos admet un point fixe c et un seul sur $\mathbb{R}$. Faire une figure.
   (b) Montrer que $u_1 \leq c \leq u_0$. Que peut on en déduire pour les termes u_{2p} et u_{2p+1}?
   (c) Prouver que les suites $(u_{2p})_p$ et $(u_{2p+1})_p$ sont monotones.
   (d) Prouver qu'elles sont adjacentes (on pensera encore au théorème des accroissements finis).

corrigé en 2.0.5

Exercice 6 *méthode de Newton*

1. Deux résultats préliminaires :
   Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $g : I \to \mathbb{R}$, une fonction continue.
   (a) On suppose que $g(x_0) > 0$. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$, tel que, pour tout $x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $g(x) > \dfrac{g(x_0)}{2}$.
   (b) On suppose maintenant que $g(x_0) < 1$. Montrer qu'il existe une constante $k \in]0,1[$ et un réel $\alpha > 0$, tels que, pour tout $x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $g(x) \leq k$.

   Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle ouvert $I =]a, b[$, ayant une racine c dans I. On suppose que $|f'(c)| \geq m > 0$. On pose

$$F(x) = \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right)$$

2. Vérifier que F est définie sur un voisinage de c, que c est un point fixe de F et que $F'(c) = 0$. On dit que c est un point fixe **super attractif.**
3. (a) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$J =]c - \delta, c + \delta[\in D_F,$$

$$\forall x \in J, |F'(x)| < 1.$$

   En déduire que $F(J) \subset J$ et que si $x_0 \in J$, la relation $x_{n+1} = F(x_n)$ définit une suite d'éléments de J.
   (b) Soit $x_0 \in J$. Montrer que la suite de premier terme x_0 définie par $x_{n+1} = F(x_n)$, vérifie

$$|x_{n+1} - c| \leqslant \frac{M_2}{2m_1} |x_n - c|^2$$

$$|x_n - c| \leqslant \left(\frac{M_2}{2m_1} \right)^{2^n - 1} |x_0 - c|^{2^n}$$

   avec

$$M_2 = \sup_{|x-c| \leqslant \delta} |f"(x)| \quad et \quad m_1 = \inf_{|x-c| \leqslant \delta} \left| f'(x) \right|.$$

   A quelle condition converge-t-elle ?

On appelle **méthode de Newton,** *la méthode qui consiste à approcher une racine de f par une suite récurrente définie par la fonction F ainsi associée à f.*
corrigé en 2.0.6

2 corrigés

Corrigé n° 2.0.1 de l'exercice *1*

1. Si f est croissante, la suite $(u_n)_n$ que l'énoncé suppose définie, est monotone. En effet,
   – si $u_0 \leq u_n$, on démontre par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$;
   – si $u_0 \geq u_n$, on démontre par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$.
   Ainsi, $(u_n)_n$ est soit croissante, soit décroissante.
2. Si f est décroissante, alors $f \circ f = g$ est croissante. Par construction les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ vérifient $v_{n+1} = g(v_n)$ et $w_{n+1} = g(w_n)$. Elles sont donc monotones (et leur sens de croissance dépend de leurs premiers termes : $v_0 = u_0, v_1 = u_2$ et $w_0 = u_1, w_1 = v_3$).
3. On suppose que f est décroissante et admet un point fixe p tel que $u_0 = v_0 \leq p \leq w_0 = u_1$. Montrons par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) := (v_n \leq p \leq w_n)$.
   – Cela est vérifié pour $n = 0$.
   – On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $v_n \leq p \leq w_n$ et, en appliquant $g = f \circ f$ qui est croissante, il vient :
   $$g(v_n) = v_{n+1} \leq g(p) = p \leq g(w_n) = w_{n+1}$$
   ce qui établit $\mathcal{P}(n+1)$.

Corrigé n° 2.0.2 de l'exercice *2*

On pose $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est continue et change de signe sur $[a, b]$ puisque :
– $g(a) = f(a) - a \geq 0$,
– $g(b) = f(b) - b \leq 0$.
Et d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = f(c) - c = 0$.

Corrigé n° 2.0.3 de l'exercice *3*

1. Deux résultats préliminaires :
   (a) On suppose que pour un certain $x_0 \in I$, $g(x_0) < 1$. Comme g est continue au point x_0 :
   pour tout $\varepsilon > 0$, il existe α_ε tel que pour tout $x \in I$,
   $$|x_0 - x| \leq \alpha_\varepsilon \Rightarrow g(x_0) - \varepsilon \leq g(x) \leq g(x_0) + \varepsilon.$$
   On pose alors $\varepsilon = \dfrac{1 - g(x_0)}{2}$, et il vient lorsque $|x - x_0| \leq \alpha_\varepsilon$,
   $$g(x) \leq g(x_0) + \varepsilon = \frac{1 + g(x_0)}{2} = k < 1.$$
   (b) On suppose maintenant que $g(x_0) > 1$. Écrivons à nouveau que g est continue en x_0, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe α_ε tel que pour tout $x \in I$,
   $$|x_0 - x| \leq \alpha_\varepsilon \Rightarrow g(x_0) - \varepsilon \leq g(x) \leq g(x_0) + \varepsilon.$$
   Avec $\varepsilon = \dfrac{g(x_0) - 1}{2}$ il vient :
   $$|x_0 - x| \leq \alpha_\varepsilon \Rightarrow g(x_0) - \varepsilon = \frac{g(x_0) + 1}{2} \leq g(x).$$
   En observant que $k = \dfrac{g(x_0) + 1}{2} > 1$, on a le résultat demandé.

2. Soient f de classe $\mathcal{C}^1$ et c tel que $f(c) = c$ et $|f'(c)| < 1$.
   (a) Comme $g = |f'|$ est continue et vérifie $g(c) < 1$, d'après la question préliminaire, il existe un réel $k < 1$ et un réel $\alpha > 0$ tels que
   $$|c - x| \leq \alpha \Rightarrow g(x) \leq k < 1. \tag{2.1}$$
   (b) Si $]c - \beta, c + \beta[\subset I$ et si α est comme dans la formule (2.1), on pose $\delta = \min\{\alpha, \beta\}$. Pour tout $x \in J =]c - \delta, c + \delta[$, par le théorème des accroissements finis, il existe t compris entre x et c tel que
   $$|f(x) - f(c)| = |f'(t)(x - c)| \leq k|x - c| < \delta.$$
   On a donc $f(x) \in J$.
   Cela prouve que $f(J) \subset J$.
   (c) Comme $f(J) \subset J$, si $u_0 \in J$, la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ définit bien une suite indexée sur $\mathbb{N}$ tout entier. En effet,
   – u_0 est bien défini et appartient à J ;
   – si u_n est défini et appartient à J, $f(u_n) = u_{n+1}$ est aussi défini et appartient à J.

   Remarque : Ce problème peut laisser un(e) novice dans l'embarras :
   qu'à-t-on à prouver au juste, y a-t-il vraiment quelque chose qui vaille d'être prouvé se demandera-t-il(elle) ?
   Pour comprendre la problématique considérer la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = -1/2 \\ u_{n+1} & = \ln(1 + u_n) \end{cases}$
   (d) Montrons par récurrence sur n la propriété,
   $$\mathcal{P}(n) = \{|u_n - c| \leqslant k^n \ |u_0 - c| < \alpha\}.$$
   – La relation est claire lorsque $n = 0$;
   – Supposons la établie pour un certain n; comme f est définie sur un intervalle contenant u_n et c (éléments de J, clairement), d'après le théorème des accroissements finis, il existe t compris entre u_n et c tel que
   $$|u_{n+1} - c| = |f(u_n) - f(c)| = |f'(t)(u_n - c)|$$
   Alors $|u_n - c| \leq k^n|u_0 - c| < |u_0 - c| < \alpha$ et $|f'(t)| < k$ puisque u_n, c et donc t appartiennent à J. Il vient
   $$|u_{n+1} - c| = |f'(t)(u_n - c)| \leq k \times k^n|u_0 - c[= k^{n+1}|u_0 - c|.$$
3. On suppose ici que $|f'(c)| > 1$.
   (a) D'après la question préliminaire (avec $g = |f'|$ continue et telle que $g(c) > 1$), il existe $k > 1$ et $\alpha > 0$ tels que
   $$|x - c| < \alpha \Rightarrow \left|f'(c)\right| \geq k.$$

(b) Supposons que $(u_n)_n$ vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ et qu'elle converge vers c. À partir d'un certain rang n_0 on aura $|u_n - c| < \alpha$ ce qui impose pour $n \geq n_0$, $|u_{n+1} - c| = |f(u_n) - f(c)| = |f'(t)||u_n - c| \geq k|u_n - c)|$. De cela on déduit que

$$|u_{n_0+p} - c| \geq k^p |u_{n_0} - c|.$$

La contradiction est immédiate si $|u_{n_0} - c| \neq 0$.

On déduit alors que, si une telle suite converge, $|u_{n_0} - c| = 0$ et dans ce cas, pour tout $n \geq n_0$, $u_n = c$ la suite est stationnaire.

Corrigé n° 2.0.4 de l'exercice *4*

Voir le corrigé de l'énoncé détaillé qui suit.

Corrigé n° 2.0.5 de l'exercice *5*

1. (a)

   (b) On aura observé que $u_1 = \sin u_0 \in [-1, 1]$, intervalle sur lequel sin est croissante.
   On a donc $\sin([0, 1]) = [0, \sin 1] \subset [0, 1]$ et $\sin([-1, 0]) = [-\sin 1, 0] \subset [-1, 0]$.
   Une récurrence facile permet de montrer que si $u_1 \in I$ avec $f(I) \subset I$ tous les termes u_n avec $n \geq 1$, d'une suite vérifiant $u_{n+1} = u_n$, sont dans I. Dans le cas présent $f = \sin$ et $I = [0, 1]$ ou $I = [-1, 0]$ on en déduit que u_n est du signe de u_1.

   (c) On observe que $|\sin x| \leq |x|$.
   Donc, si $u_1 \in [0, 1]$, $u_2 = \sin u_1 \leq u_1$ et la suite est décroissante (démontrer par récurrence que $u_{n+1} \leq u_n$). Elle converge donc puisqu'elle est aussi minorée par 0.
   Si $u_1 \in [-1, 0]$, $u_1 \leq \sin u_1 = u_2 \leq 0$ et la suite est croissante.
   Dans les deux cas, de $\sin u_n = u_{n+1}$, on déduit par passage à la limite, puisque la fonction sin est continue sur $\mathbb{R}$, que la limite vérifie $\sin \ell = \ell$. Un étude rapide ou un coup d'œil sur le graphe montre que $\ell = 0$.

   (d) Comme $\lim u_n = 0$,
   $$u_{n+1} = \sin u_n = u_n - \frac{u_n^3}{3!} + o(u_n^3)$$
   $$u_{n+1} - u_n = -\frac{u_n^3}{3!} + o(u_n^3) \sim -\frac{u_n^3}{3!}.$$

2. On suppose que $\begin{cases} u_0 & = 1, \\ u_{n+1} & = \cos u_n \end{cases}$

   (a) On étudie la fonction $\phi : x \to x - \cos x$.
   • Elle est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ et admet donc au plus une racine.
   • $\phi(0) = -1 < 0 < \phi(1) = 1 - \cos 1$. Comme la fonction est continue et change de signe elle s'annule en un point $c \in]0, 1[$ (Thm des V. I.)

   cos admet donc un unique point fixe qui appartient à $]0, 1[$.

   (b) • Comme cos décroît sur $[0, 1]$ on a
   $$0 \leq c \leq u_0 = 1 \Rightarrow \cos u_0 = u_1 \leq \cos c = c \leq \cos 0 = 1.$$
   • On montre alors par récurrence sur p la propriété : $\boxed{P(p) := \{0 < u_{2p+1} \leq c \leq u_{2p} < 1\}}$
   ...
   Attention : sans l'encadrement par 0 et 1, on ne peut faire de démonstration correcte (on ne sait plus si la fonction est monotone sur l'intervalle considéré).

(c) Les suites $(u_{2p})_p$ et $(u_{2p+1})_p$ sont monotones. En effet, chacune d'elle vérifie
• $0 \leq x_p \leq 1$;
• $x_{p+1} = \cos \circ \cos x_p$ et la fonction $\cos \circ \cos$ est croissante sur $[0, 1]$.

(d) Montrons qu'elles sont adjacentes.
• Observons que, **par le théorème des accroissements finis**, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe t_p et s_p strictement compris entre 0 et 1 tels que

$$|u_{2p+2} - u_{2p+3}| = |\sin t_p||u_{2p+1} - u_{2p+2}| = |\sin t_p||\sin s_p||u_{2p} - u_{2p+1}|$$

• En notant $k = \max_{x \in [0,1]} |\sin(x)|$, on a
$0 < k < 1$, $|u_{2p+2} - u_{2p+3}| < k^2 |u_{2p} - u_{2p+1}|$ et par récurrence :

$$|u_{2p} - u_{2p+1}| \leq k^{2p} |u_0 - u_1|$$

ce qui prouve que $\lim |u_{2p} - u_{2p+1}| = 0$.

Les suites $(u_{2p})_p$ et $(u_{2p+1})_p$ sont adjacentes et ont la même limite. $(u_n)_n$ converge donc.

Corrigé n° 2.0.6 Méthode de Newton, exercice *6*

1. Deux résultats préliminaires :
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $g : I \to \mathbb{R}$, une fonction continue.
(a) Supposons que $g(x_0) > 0$. Comme g est continue en x_0,
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha_\varepsilon > 0$ tel que pour $x \in I$,

$$|x - x_0| \leq \alpha_\varepsilon \Rightarrow g(x_0) - \varepsilon \leq g(x) \leq g(x_0) + \varepsilon.$$

En prenant $\varepsilon = \dfrac{g(x_0)}{2}$, nous avons lorsque $|x - x_0| \leq \alpha_\varepsilon$, $g(x_0) - \varepsilon = \dfrac{g(x_0)}{2} \leq g(x)$
CQFD.
(b) Supposons que $g(x_0) < 1$. Comme précédemment, puisque g est continue en x_0, on peut écrire que
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha_\varepsilon > 0$ tel que pour $x \in I$,

$$|x - x_0| \leq \alpha_\varepsilon \Rightarrow g(x_0) - \varepsilon \leq g(x) \leq g(x_0) + \varepsilon.$$

Nous posons alors $\varepsilon = \dfrac{1 - g(x_0)}{2}$ ce qui fait que pour tout $x \in I \cap]x_0 - \alpha_\varepsilon, x_0 + \alpha_\varepsilon[$, $g(x) \leq g(x_0) + \varepsilon = \dfrac{1 + g(x_0)}{2}$ Le résultat est prouvé en observant que $k = \dfrac{1 + g(x_0)}{2} < 1$.

Soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle ouvert $I =]a, b[$ et $c \in I$ tel que que $|f'(c)| > 0$.

2. Comme $|f'|$ est continue, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que

$$|x-c| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon \leq |f'(x)| - |f'(c)| \leq \varepsilon.$$

Prenons $\varepsilon = |f'(c)|/2$. On aura alors pour $x \in]c-\delta_\varepsilon, c+\delta_\varepsilon[\cap I$, $|f'(x)| > \varepsilon/2 > 0$ et F est donc définie sur ce voisinage de c.

On a par ailleurs $F(c) = c$ et $F'(x) = \dfrac{f"(x)f(x)}{f'^2(x)}$ est nulle en $x = c$.

3. (a) Comme F' est continue (F est de classe $\mathcal{C}^1$) et $F'(c) = 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$J = [c-\delta, c+\delta] \subset D_F \text{ et } \forall x \in J, |F'(x)| < 1.$$

• La démonstration est identique à celle qui précède : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta'_\varepsilon > 0$ tel que

$$x \in D_F, |x-c| \leq \delta'_\varepsilon \Rightarrow |F'(x) - F'(c)| = |F'(x)| \leq \varepsilon.$$

On choisit donc $\delta = \min\{\delta'_\varepsilon, \delta'_\varepsilon\}$.

• L'intervalle J est donc stable par F. En effet, par le TAF, pour tout $x \in J$, il existe $t_x \in J$ (compris entre x et c) tel que

$$|F(x) - F(c)| = |F(x) - c| \leq |F'(t_x)||x-c| < |x-c| < \delta$$

En particulier, la relation $x_{n+1} = F(x_n)$ définit une suite d'éléments de J pour tout $x_0 \in J$.

• Soit $x_0 \in J$ et $(x_n)_n$ définie par $x_{n+1} = F(x_n)$.

(b) Observons que

$$x_{n+1} - c = \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) - c = -\frac{f(x_n) + f'(x_n)(c-x_n)}{f'(x_n)}$$

On pense alors à **l'inégalité de Taylor-Lagrange :** lorsque f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur J, pour tout $(a,b) \in J^2$, on a

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + R_1(b)$$

avec une majoration du reste : $|R_1(b)| \leq \dfrac{1}{2}M_2|b_-a|^2$.

$\star$ Nous faisons ici $a = x_n$ et $b = c$, ce qui s'écrit

$$f(c) = f(x_n) + f'(x_n)(c-x_n) + R_1(c)$$

Comme $f(c) = 0$, on retrouve avec $M_2 = \sup\limits_{|x-c|\leqslant\delta} |f"(x)|$ et $m_1 = \inf\limits_{|x-c|\leqslant\delta} |f'(x)|$:

$$|x_{n+1} - c| = \left|\frac{f(x_n) + f'(x_n)(c-x_n)}{f'(x_n)}\right| = \left|\frac{R_1(c)}{f'(x_n)}\right| \leq \frac{M_2}{2m_1}|x_n - c|^2 \qquad (2.2)$$

Remarque : par la formule de Taylor-Lagrange, plus agréable à manipuler (mais hors programme CPGE), il existe un point t_{x_n} compris entre x_n et c tel que

$$f(c) = f(x_n) + f'(x_n)(c-x_n) + \frac{1}{2}f"(t_{x_n})(c-x_n)^2$$

$$|x_{n+1} - c| = \left| \frac{f(x_n) + f'(x_n)(c - x_n)}{f'(x_n)} \right| = \frac{|f"(t_{x_n})|}{2}(c - x_n)^2| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_n - c|^2 \quad (2.3)$$

m_1 et M_2 sont bien définis puisqu'une fonction continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est bornée (et atteint ses bornes).

• A partir de là, on démontre par récurrence sur n la relation :

$$|x_n - c| \leqslant \left(\frac{M_2}{2m_1}\right)^{2^n - 1} |x_0 - c|^{2^n}$$

– Elle est immédiate pour $n = 0$.
– Supposons cette relation établie pour une certaine valeur de n. En substituant dans (2.3), il vient

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - c| &\leq \frac{M_2}{2m_1} |x_n - c|^2 \\ &\leq \frac{M_2}{2m_1} \left(\left(\frac{M_2}{2m_1}\right)^{2^n - 1} |x_0 - c|^{2^n} \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{M_2}{2m_1}\right)^{2^{n+1} - 2 + 1} |x_0 - c|^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

• On observera que la dernière inégalité n'implique pas la convergence. Par contre, comme elle est de la forme

$$\frac{M_2}{2m_1} \times \left(\frac{M_2}{2m_1} |x_0 - c|\right)^{2^{n+1}}$$

la suite converge dès lors que $\boxed{\frac{M_2}{2m_1} |x_0 - c| < 1.}$ L'ouvert $\Omega =]c - \delta_1, c + \delta_1[$ avec $\delta_1 < \min \left\{ \delta, \frac{M_2}{2m_1} \right\}$ fait donc l'affaire.

Références

[1] *La méthode de Newton et ses variantes pour l'optimisation*
Polycopié en ligne, rédigé comme complément pour les TIPE
http ://www.univenligne.fr